EINE METHODE ZUR BERECHNUNG DES STRAHLUNGSTRANSPORTS IN DEN AUSGEDEHNTEN ATMOSPHÄREN HYDRODYNAMISCHER PROTOSTERNMODELLE

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Claude Bertout
aus Nesle, Frankreich

Göttingen 1975

EINE METHODE ZUR BERECHNUNG DES STRAHLUNGSTRANSPORTS IN DEN AUSGEDEHNTEN ATMOSPHÄREN HYDRODYNAMISCHER PROTOSTERNMODELLE

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Claude Bertout
aus Nesle, Frankreich

Göttingen 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Prof. Dr. I. Appenzeller

Korreferent: Prof. Dr. H.H. Voigt

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Oktober 1975

Herrn Prof. Dr. I. Appenzeller verdanke ich die Anregung zu dieser Arbeit. An dieser Stelle möchte ich mich bei ihm für die hilfreiche Betreuung und die ständige Bereitschaft zu Diskussionen aufrichtig bedanken.

Noëlle Bertout-Baty und Herrn Dr. C. Möllenhoff danke ich für ihre geduldige Hilfe bei der Übersetzung dieser ursprünglich auf englisch verfaßten Dissertation.

Meinen Dank gilt ferner Herrn R. Baty, der die materielle Voraussetzung zu dieser Arbeit im akademischen Jahr 1973-74 geschaffen hat.

Dieses Projekt wurde teilweise durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (Sachbeihilfe Ap 19/1) finanziell unterstützt.

Die numerischen Rechnungen wurden auf der UNIVAC 1108 der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung m.b.H., Göttingen, durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1. Dynamischer Kollaps eines Protosterns
   1.1 Einleitung
   1.2 Grundlegende Annahmen in den Modellrechnungen
   1.3 Ergebnisse der numerischen Rechnungen
2. Strahlungstransport in protostellaren Wolken
   2.1 Einleitung
   2.2 Formulierung des Problems
   2.3 Approximationen für den Strahlungstransport in den hydrodynamischen Rechnungen
   2.4 Ausgedehnte sphärische Atmosphären
3. Lösungsverfahren des radiativen Transports
   3.1 Einleitung
   3.2 Formale Lösung der Transportgleichung
      3.2.1 Koordinatentransformationen
      3.2.2 Randbedingungen
         3.2.2.a Innere Randbedingung
         3.2.2.b Äußere Randbedingung
      3.2.3 Die Differenzengleichungen
   3.3 Momente des Strahlungsfeldes
   3.4 Das Temperatur-Korrekturverfahren
      3.4.1 Das Iterationsverfahren
      3.4.2 Die innere Randbedingung
         3.4.2.a Die planparallele Randbedingung
         3.4.2.b Die sphärische Randbedingung
   3.5 Strahlungsproduktion innerhalb der Atmosphäre

4. Ergebnisse und Diskussion

4.1 Vorausetzungen bei der Berechnung des emittierten Spektrums

4.2 Optisch dicke Kollapsphase

4.3 Endphase der Protosternentwicklung

4.4 Vergleich mit Beobachtungen

4.4.1 Einleitung

4.4.2 Dunkle Globulen

4.4.3 Infrarote Objekte

4.4.4 T-Tauri Sterne und verwandte Objekte

Literaturverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem des Strahlungstransports in Hüllen von Protosternen diskutiert und im Rahmen eines numerischen hydrodynamischen Programms zur Berechnung der Entwicklung von Protosternen behandelt.

Im Vergleich mit üblichen Sternatmosphären sind die Atmosphären von Protosternen sehr ausgedehnt, so daß ihre Krümmungen einen merklichen Einfluß auf die Eigenschaften des Strahlungsfeldes ausüben. In diesem Fall müssen wir also auf die planparallele Näherung der Atmosphäre verzichten. Der Strahlungstransport muß explizit in zwei Dimensionen betrachtet werden. Wollen wir ferner den Fall einer nicht-grauen Atmosphäre berechnen, so wird das Problem sogar dreidimensional: der Strahlungsfluß ist radius-, winkel- und frequenzabhängig.

Daher ist das Problem des Strahlungstransports in Protosternen wesentlich komplizierter als in üblichen Sternatmosphären. Im Gegenteil zur planparallelen Atmosphärentheorie existiert hier keine allgemeine Lösung der Transportgleichung, auch nicht im grauen Fall; die optische Tiefe ist radius- und winkelabhängig, so daß das Strahlungsfeld explizit von der Opazitätenverteilung in der protostellaren Wolke abhängt. Die Eddingtonsche Näherung gilt nicht im Falle einer ausgedehnten Atmosphäre,

denn das Strahlungsfeld wird in den optisch dünnen Gebiete stark anisotrop. Als weiterer Nachteil ist die lange Rechenzeit und der große Speicherbedarf für die numerische Behandlung von mehrdimensionalen Problemen zu nennen.

Diese Schwierigkeiten sind offensichtlich der Grund dafür, daß der Strahlungstransport in Protosternentwicklungsrechnungen bis jetzt nur in einer sehr genäherten Weise behandelt worden ist. Da aber einerseits die Eigenschaften des sphärisch-symmetrischen Protosternkollapses qualitativ gut verstanden sind, und da sich andererseits auch die infraroten Beobachtungstechniken ständig entwickelt haben und jetzt in der Lage sind, relativ detaillierte Spektren von infraroten Objekten zu liefern, ist es von großem Interesse, eine möglichst genaue Lösung des Strahlungstransportproblems mit einem hydrodynamischen Entwicklungsprogramm zu kombinieren. Das ist der Zweck der folgenden Untersuchung.

Im ersten Kapitel werden wir zunächst einmal den Begriff des Protosterns näher definieren, um dann über Grundannahmen und Hauptergebnisse in den bis jetzt durchgeführten Kollapsrechnungen von Protosternen zu referieren und diskutieren.

Im zweiten Kapitel werden wir uns auf das radiative Transportproblem beschränken. Die bis jetzt in den Kollapsrechnungen verwendeten Näherungen sowie die möglichen Verbesserungen zur Lösung dieses Problems werden wir dort diskutieren. Schließlich wird über einige Methoden und Ergebnisse der sphärischen Atmosphärentheorie berichtet.

Bevor wir im vierten Kapitel unsere Ergebnisse für die zeitliche Entwicklung des Spektrums eines 1 $M_\odot$ Protosterns liefern und mit infraroten Beobachtungsdaten vergleichen, werden wir im dritten Kapitel das von uns entwickelte mathematische Lösungsverfahren des Transportproblems in allen Einzelheiten beschreiben.

1. Dynamischer Kollaps eines Protosternes

1.1 Einleitung

Wenn wir annehmen, daß sich Sterne aus interstellarer Materie bilden, müssen wir zunächst erklären, wie sich Wolken bilden können, die eine genügend hohe Dichte besitzen, um gravitationsinstabil zu werden. Obwohl dichte Wolken in der Milchstraße beobachtet worden sind (Heiles 1971), sind die Mechanismen ihrer Entstehung noch nicht ganz verstanden worden. Zwei mögliche Bildungsprozesse sind in der Literatur diskutiert worden : Materie, die teilweise durch ein Magnetfeld zusammengehalten wird, kann Rayleigh-Taylor instabil werden und große Wolken bilden (Parker 1966). Mit dem zweiten Prozeß hat sich Field (1970) auseinandergesetzt : interstellare Materie kann unter dem Einfluß der Aufheizung durch kosmische Strahlung instabil werden und sich daher in zwei verschiedene Phasen trennen : eine dichte kalte Phase und eine dünne heiße Phase.

Nehmen wir aber an, daß in irgendeiner Weise solche dichten Wolken im Weltraum entstehen, dann müssen wir noch erklären, wie sie gravitationsinstabil werden können. Man weiß, daß Dichte, Temperatur und Masse einer gravitationsinstabilen Wolke das Jeans´sche Kriterium erfüllen müssen. Diese Bedingung setzt für die Masse einer interstellaren Wolke mit typischer Temperatur und Dichte als untere Grenze 10^3 $M_\odot$ voraus. Für größere Massen als dieser kritische

Wert ist dann die Wolke gravitationsgebunden. Interstellare Wolken haben aber meistens nicht so hohe Massen, sie würden also nicht kollabieren, wenn sie nicht durch irgendeinen Mechanismus dazu gezwungen wären. Daß Sterne in Spiralarmen entstehen, ist ohnehin bekannt; es ist daher plausibel, daß die Mechanismen, die für die Spiralstruktur der Galaxien verantwortlich sind, zugleich die Entstehung von Sternen begünstigen können.

Eine einfache Erklärung dieses Phänomens liefert die Dichtewellentheorie (Roberts 1969). Die Dichtewelle der Spiralstruktur wird vermutlich von einer Stoßfront im interstellaren Medium begleitet. Innerhalb dieser Stoßfront findet eine starke Kompression statt, so daß besonders massereiche und dichte Wolken gravitationsinstabil werden und kollabieren. Shu et al. (1972) haben darauf hingewiesen, daß die kritische Masse für den Kollaps einer Wolke durch diesen Prozeß auf 120 $M_\odot$ herabgesetzt sein könnte.

Offensichtlich können keine Sterne mit normalen Massen durch den direkten Kollaps einer interstellaren Wolke gebildet werden. Während des Kollapses einer interstellaren Wolke werden jedoch immer kleinere Teilgebiete der zusammenfallenden Wolke ebenfalls gravitativ instabil. Große Wolken fragmentieren daher in einzelne Bruchstücke, von denen jedes für sich allein weiter kollabieren und eventuell weiter zerfallen kann. So kann man die Entstehung der Sterne normaler Massen verstehen. Dieser Fragmentationsprozeß hört erst dann auf, wenn die Dichte in den einzelnen Bruchstücken so hohe Werte erreicht, daß diese für

thermische Strahlung undurchsichtig werden.

Die Endfragmente, die für ihre eigene Strahlung undurchsichtig sind, die sich aber noch nicht in hydrostatischem Gleichgewicht befinden, nennt man Protosterne. Solche Objekte kann man in einigen dichten Wolken beobachten.

Einzelne Protosterne können sich nur dann bilden, wenn sie individuell gravitationsinstabil sind. Für einen 1 $M_\odot$ Protostern wird diese Bedingung erfüllt, wenn die Dichte mindestens 10^{-19} g/cm^3 bei einer Temperatur von ungefähr 10 K beträgt. Im Innern einer dichten Wolke ist der wichtigste Aufheizungsprozeß die Kompression der einfallenden Materie; die wichtigsten Abkühlungsprozesse sind der Energietransport durch Kollision zwischen Gasmolekülen und Staub und die radiative Abkühlung des Staubes. Die durch diese Prozesse bedingte Temperatur im Innern der Wolke haben Hayashi (1966) und Larson (1973b) unabhängig voneinander berechnet. Beide fanden heraus, daß diese Temperatur ungefähr bei 10 K konstant bleibt; das gilt über den ganzen Dichtebereich, nähmlich von dem für den Beginn des Kollapses notwendigen Minimum ab bis zu der Dichte, bei der der zentrale Teil der Wolke optisch dick wird. Bei der oben erwähnten Dichte zu Beginn des Kollapses ist der Radius der 1 $M_\odot$ Wolke $\sim 10^{17}$ cm., die Opazität beträgt ungefähr 1cm^2/g.(Gaustad 1963), so daß die totale optische Tiefe der Wolke ~ 0.1 erreicht. Das bedeutet, daß der Protostern zum Zeitpunkt seiner Entstehung optisch dünn ist.

Der individuelle Kollaps von Protosternen ist schon von verschiedenen Autoren numerisch untersucht worden

(Bodenheimer 1968; Narita et al. 1970; Appenzeller und Tscharnuter 1974, 1975; Larson 1969a, 1972a). In diesen Arbeiten ist die Entwicklung von Protosternen verschiedener Massen in detaillierter Weise beschrieben worden. In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels wollen wir uns mit den zugrundeliegenden Annahmen und den Hauptergebnissen dieser Rechnungen beschäftigen. Da in den letzten Jahren mehrere zusammenfassende Artikel über diesen Gegenstand erschienen sind (Bodenheimer 1972, Appenzeller 1972, Larson 1973a, Kippenhahn und Tscharnuter 1975), wurde hier nicht versucht, über alle am Kollapse beteiligten physikalischen Prozesse ausführlich zu berichten. Hier soll nur gezeigt werden, daß die erhaltenen Ergebnisse in guter qualitativen Übereinstimmung untereinander stehen, obwohl von den oben erwähnten Autoren unterschiedliche numerische Methoden benutzt und verschiedene Annahmen bei den Rechnungen gemacht worden sind. Diese Tatsache erlaubt uns der Zuverlässigkeit der numerischen Methoden zu vertrauen und rechtfertigt weitergehende Arbeiten über dieses Thema.

1.2 Grundlegende Annahmen in den Modellrechnungen

(a) Hier betrachten wir nur sphärisch-symmetrische Protosterne, in denen insbesondere Rotation und magnetische Felder vernachlässigt werden.

(b) Anfangsbedingungen

Larson (1969a, 1972a) und Appenzeller und Tscharnuter (1974, 1975) beginnen ihre Rechnungen mit einer stationnären,

homogenen und isothermen Gaskugel von vorgegebener Masse; Temperatur und Dichte wurden so gewählt, daß Gravitationsinstabilität gewährleistet wird. Wie früher erwähnt, liegt unter dieser Bedingung für eine Temperatur von 10 K die Anfangsdichte bei $\sim 10^{-19}$ g/cm^3.

Als Anfangsmodell haben Narita et al. (1970) und Bodenheimer (1968) eine polytrope Gaskugel mit hoher Zentraldichte gewählt ($\rho_c = 10^{-9}$ g/cm^3 in der Arbeit von Narita et al.). Als Anfangsgeschwindigkeit der Materie wurde die Geschwindigkeit des freien Falls vom Unendlichen her gewählt. Hier muß hervorgehoben werden, daß die Anfangsdichten, die von Narita et al. und Bodenheimer benutzt worden sind von unserem aktuellen Verständnis der physikalischen Prozesse im interstellaren Raum kaum bestätigt werden. Die Beobachtungen von dunklen Globulen (Bok et al. 1971) liefern für diese Objekte Radien- und Massenwerten, die mit den Anfangswerten gut übereinstimmen, die man durch das Jeans´sche Kriterium berechnet kann (Larson 1972b). Im vierten Teil dieser Arbeit werden wir die Globulen ausführlich diskutieren. Ihre besonderen Eigenschaften legen den Verdacht nahe, es könne sich dabei um Protosterne am Anfang ihres Kollapses handeln.

In den folgenden Abschnitten wird sich herausstellen, daß die Wahl der Anfangsbedingungen für den Ausgang des Kollapses von großer Bedeutung ist und damit die beobachtbaren Eigenschaften des neuentstandenen Sternes sehr stark bestimmt.

(c) Randbedingungen

Appenzeller (1972) hat den Einfluß der Randbedingungen

auf die Ergebnisse von Kollapsrechnungen diskutiert. Zwei mögliche Kombinationen werden von ihm in Betracht gezogen :

1. R = konst. , T (R) = konst.
2. T (R) = konst. , P (R) = konst.

Die Hauptunterschiede in den Protosternentwicklungen, die diese verschiedenen Randbedingungen zur Folge haben, sind verschiedene Zeitskalen des Kollapses und daher verschiedene Leuchtkräfte. Die qualitativen Eigenschaften des Kollapses bleiben aber sonst unverändert.

In Ermangelung weiterer Kenntnisse über die Sternentstehung ist die Wahl der Randbedingungen in gewissem Maße willkürlich.

(d) Weitere Voraussetzungen

Bevor man mit den Rechnungen beginnen kann, sind weitere Annahmen notwendig. Die chemische Zusammensetzung der protostellaren Materie wird als die der Population I angenommen. Staubopazitäten beruhen auf Gaustads (1963) Daten. Die Staubopazitäten gehören immer noch zu den unsichersten Parametern; Larson (1972) zeigte jedoch, daß die qualitativen Ergebnisse des Kollapses massenarmer Protosterne durch die verwendeten Staubopazitäten recht wenig beeinflußt wurden. Wird die Verdampfungstemperatur des Staubes überschritten, sind verschiedene, aber äquivalente Tabellen für Gasopazitäten von den Autoren benutzt worden.

1.3 Ergebnisse der numerischen Rechnungen

Die Entwicklung eines Protosterns läßt sich berechnen, indem man die Grundgleichungen der Sternentwicklung numerisch löst. Dabei muß allerdings die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts durch die hydrodynamische Bewegungsgleichung ersetzt werden. In dieser Arbeit wurde ein von Appenzeller und Tscharnuter entwickeltes hydrodynamisches Programm benutzt, welches auf Methoden von Kippenhahn et al. (1967) aufbaut. Die numerischen Methoden, die von den verschiedenen Autoren in den Kollapsrechnungen gebraucht worden sind, weichen in der Behandlung der Stoßfronten merklich voneinander ab. (Wenn der zentrale Teil der Wolke hydrostatisches Gleichgewicht erreicht und einen sternartigen Kern bildet, während die Materie der äußeren Schichten in freien Fall auf den Kern herabfällt, entsteht eine Stoßfront in der Übergangsschicht).

Hayashi (1970) kritisierte Larsons Ergebnisse insofern, daß dieser den Energietransport innerhalb der Stoßfront wahrscheinlich zu ungenau berechnete. Das hatte zur Folge, daß während des Kollapses zu viel Energie freigesetzt wurde. Um diese Möglichkeit zu überprüfen, haben Appenzeller und Tscharnuter (1975) den Kollaps eines 1 $M_\odot$ Protosternes berechnet. Dabei benutzten sie künstliche Viskosität um die Stoßfronten numerisch zu behandeln (Appenzeller 1970). Ihre Arbeit bestätigt Hayashis Kritik, zeigt aber, daß Larsons Hauptergebnisse durch die verbesserte Methode, die Stoßfront zu behandeln, kaum verändert werden.

Die Lösung des radiativen Transportproblems ist ebenfalls ein Punkt, in dem große methodische Unterschiede in den verschiedene Arbeiten auftauchen.

Im nächsten Kapitel dieser Arbeit werden wir die bis jetzt benutzten Lösungen des radiativen Transports in Protosternrechnungen beschreiben. Jetzt aber wollen wir die wichtigsten Ergebnisse der Protosternkollapsrechnungen anhand der Arbeiten von Larson und Appenzeller und Tscharnuter erhörten. Die numerischen Werte, die angegeben werden, stammen von den 1 $M_\odot$ Rechnungen.

Da anfänglich die Wolke optisch dünn ist, ist die erste Phase des Kollapses isotherm. Eine andere wichtige Eigenschaft sei hervorgehoben, nämlich daß der Kollaps nicht-homolog vor sich geht. Der Grund dafür liegt in Folgendem: die äußere Randbedingung P(R)=konst. verursacht zu Beginn des Kollapses einen Druckgradient in den äußeren Schichten. Deshalb kann dort der Kollaps nicht so ungehindert fortschreiten wie in den inneren Bereichen, wo Freifallbedingungen herrschen. So nimmt die zentrale Dichte schneller zu als die Dichte in der Nähe der Oberfläche. Folglich geschieht die weitere Entwicklung des Kerns mit einer viel kürzeren Zeitskala, als die der äußeren Schichten. (Die Freifall-Zeitskala ist proportionnal zu $\rho^{-\frac{1}{2}}$). Daher folgt, daß die Dichteverteilung im Zentrum der Wolke mit der Zeit immer spitzer wird. Die Abbildung 1.1 zeigt schematisch die Entwicklung der Dichteverteilung während dieser Phase.

Wenn der zentrale Teil der Wolke optisch dicht wird, kann die durch den Kollaps freigesetzte Energie nicht mehr direkt abgestrahlt werden, so daß Temperatur und Druck in solchem Maße zunehmen, daß der Kollaps im Zentrum abgestoppt wird ($\rho_c \sim 10^{13}$ g/cm^3, $t \simeq 3.5\ 10^5$ Jahre). So wird der erste hydrostatische Kern gebildet (Abbildung 1.2).

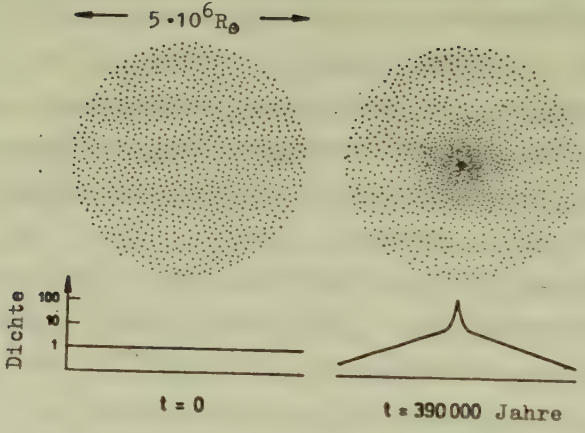


Abbildung 1.1 Erste Phase des Kollapses.
Die Dichte ist in Einheiten von der homogenen Anfangsdichte (10^{-19} g/cm^3).
(Abb. 1.1 bis 1.3 nach Kippenhahn und Tscharnuter 1975)

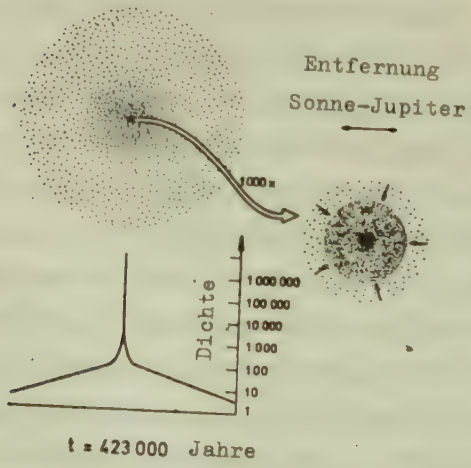


Abbildung 1.2 Entstehung des ersten hydrodynamischen Kerns.

Dieser erste Kern ist von einer Stoßfront umhüllt. Seine Masse nimmt zu, bis die Zentraltemperatur so hoch wird, daß die Wasserstoffmoleküle dissozieren (T_c=2000 K). Unter dieser Bedingung wird der Quotient der spezifischen Wärme ($\gamma = \frac{c_p}{c_v}$) kleiner als 4/3, so daß die Materie im Zentrum dynamisch instabil wird, und erneut kollabiert (Abbildung 1.3). Der zweite Kollaps endet, wenn die zentrale Dichte stellare Werte erreicht ($\rho_c \sim 10^{-2} g/cm^3$, $T_c \sim 10^4$ K). Dann entsteht ein endgültiger sternartiger Kern, der ungefähr 0.1% der totalen Masse enthält, und ebenfalls mit einer Stoßfront begrenzt ist. Die Materie der äußeren Schichten befindet sich dann noch nach wie vor im Freifall.

Bis zu diesem Zeitpunkt ist der Verlauf des Kollapses in hohem Maße unabhängig von der Anfangsmasse der Wolke.

Nach der Entstehung des stellaren Kerns muß man entsprechend der Zeitskala des Kernzuwachs vier Massenbereiche unterscheiden. Je größer die Masse (bis zu einer gewissen Grenze, s. unten) ist, desto länger ist die Zeitskala des Kernzuwachses und desto mehr entwickelt ist der zentrale Stern, wenn er beginnt sichtbar zu werden. Die Massenbereiche sind folgende:

(a) $0.25 \lesssim M/M_\odot \lesssim 1.5$

Der größte Unterschied zwischen den Entwicklungen der verschiedenen Mitglieder dieses Bereiches ist, daß die am Ende erreichte Leuchtkraft und effektive Temperatur des Kerns sich mit zunehmender Masse erhöhen. Die dabei entstehenden Sterne erscheinen am unteren Ende ihrer Hayashi-Grenze. In dem Fall einer Sonnenmasse dauert der hydrodynamische Kollaps etwa 10^6 Jahre.

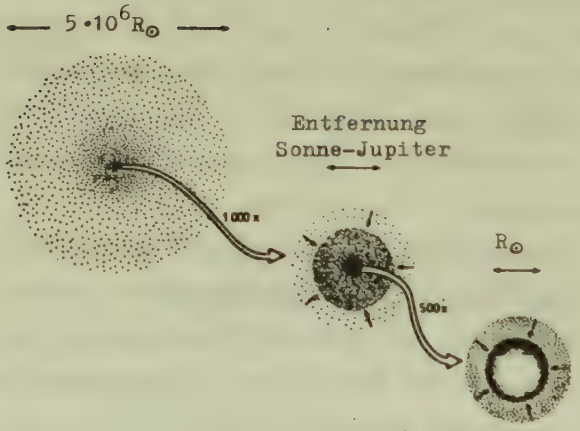


Abbildung 1.3 Kollaps der ersten Kerns nach dem Beginn der Wasserstoffdissoziation und Entstehung des zweiten (stellaren) Kerns.

(b) $1.5 \lesssim M/M_\odot \lesssim 3$

In diesem Massenbereich erscheinen die Sterne auf einem radiativen Entwicklungsweg mit zu großen Radien, um eine Hayashi-Phase zu durchlaufen.

(c) $3 \lesssim M/M_\odot \lesssim 10\text{-}20$

Die stellaren Kerne der Protosterne dieser Klasse werden Hauptreihesterne, bevor der Kollaps zum Ende gekommen ist. Larson kommt daher zu dem Schluß, daß man nicht erwarten kann, viele Vorhauptreihenobjekte mit Massen größer als ungefähr 3 $M_\odot$ zu beobachten.

(d) $M/M_\odot \gtrsim 10\text{-}20$

Larson and Starrfield (1971) schätzten ab, daß für Massen größer als $\sim 20\ M_\odot$ sowohl die radiative Aufheizung der äußeren Schichten als auch der Strahlungsdruck in der Lage sind, den Kollaps des äußeren Teiles der Hülle aufzuhalten oder sogar umzukehren. Das wurde durch Appenzeller und Tscharnuter (1974) bestätigt; sie berechneten die Entwicklung eines 60 $M_\odot$ Protosternes, dessen äußere Hülle durch den aus dem hydrostatischen Kern kommenden Energiestrom weggeblasen wurde. Das Endprodukt war ein Hauptreihenstern von 17 $M_\odot$.

Bevor wir das Problem des Strahlungstransportes in Protosternen betrachten, ist die Arbeit von Narita et al. (1970) zu erwähnen. Wegen der extremen Anfangsbedingungen, die sie benutzen, erhalten sie andere Ergebnisse als die von Larson (1969a,1972a) und Appenzeller und Tscharnuter (1974,1975). In ihren Rechnungen überspringen Narita et al. die anfängliche isotherme Phase des Kollapses und die Bildung des ersten hydrostatischen Kerns. Die Entwicklung ihres Kerns ähnelt jedoch stark der Entwicklung des stellaren

(zweiten) Kerns bei Larson. Die Zeitskala der Massenzunahme des Kerns bei Narita et al. ist sehr kurz (5 Jahre gegenüber 10^6 Jahre in Larsons Arbeit über den 1 $M_\odot$ Protostern). Das hat zur Konsequenz, daß die Leuchtkräfte, die von Narita et al. berechnet wurden viel höher sind als die von Larson.

Die sehr hohe Anfangsdichte, die von Narita et al. benutzt wurde, und die offensichtlich für diese schnelle Entwicklung verantwortlich ist, wird nicht durch unsere gegenwärtige Kenntnis über die Bildung interstellarer Wolken gestüzt.

Die Arbeit von Wesbrook und Tarter (1975), die kurz vor Abschluß dieser Dissertation erschien, bringt vielleicht neue Aspekte zu diesem Thema. Westbrook und Tarter beginnen ihre Rechnungen mit einem Anfangsmodell des Larsonschen Types und bekommen Leuchtkräfte, die den von Narita et al. ähneln. Die Autoren behaupten, daß die Verschiedenheit ihrer Ergebnisse im Vergleich mit den von Larson durch die Verwendung von Lagrangeschen Koordinaten bedingt ist. Larson benutzte nämlich Eulersche Koordinaten. Diese Erklärung bleibt aber fraglich, da die Entwicklung eines 1 $M_\odot$ Protosternes von Appenzeller und Tscharnuter zuerst mit Lagrangeschen, später mit Eulerschen Koordinaten berechnet wurde, ohne daß sich große Unterschiede in den Ergebnisse ergaben (Appenzeller, private Mitteilung).

2. Strahlungstransport in protostellaren Wolken

2.1 Einleitung

Der radiative Energietransport ist von besonderer Bedeutung in Sternentwicklungrechnungen, da er die theoretischen Rechnungen mit den beobachtbaren Eigenschaften verknüpft. Ohne eine präzise Lösung des Strahlungstransportproblems in den äußeren Schichten des Protosternes ist ein Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Parametern von Vorhauptreihenobjekten nicht möglich.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurde gezeigt, daß die Entwicklungsrechnungen für Protosterne qualitativ vergleichbare Ergebnisse untereinander liefern, obwohl sehr verschiedene Annahmen von den Autoren gemacht wurden. Außerdem stehen die berechneten Kollapsparameter in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten von YY Ori Sterne (Larson 1969a, Appenzeller und Tscharnuter 1975).

Wie wir jedoch sehen werden, erlaubt die genäherte Behandlung des Strahlungstransportproblems durch die Autoren der Protosternrechnungen keine Aussagen über das emittierte Spektrum im Laufe der Entwicklung. Eine andere Konsequenz dieser genäherten Behandlung ist die Unsicherheit der Temperaturverteilung.

Eine der besten approximierten Temperaturverteilung, die bis jetzt in den Kollapsrechnungen benutzt wurde, hat Larson (1972a) entwickelt. Er schätzte ab, daß die Temperatur dabei noch um einen Faktor zwei falsch sein konnte.

Das ist wahrscheinlich unwichtig für Protosterne kleiner Masse, könnte aber wesentlich die Entwicklung von Protosternen großer Masse beeinflußen, da in diesem letzten Fall der Strahlungsdruck nicht vernachlässigbar ist.

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels werden wir erläutern, welche Eigenschaften eine Lösung des radiativen Transportsproblems in den äußeren Schichten eines Protosterns haben sollte. Damit werden wir die bis jetzt in den Modellrechnungen benutzten Approximationen diskutieren. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir uns dann mit den Eigenschaften und den numerischen Behandlungsmethoden von Atmosphären in sphärischer Geometrie beschäftigen.

2.2 Formulierung des Problems

Nach der ersten isothermen Phase des Kollapses können in einem sphärisch-symmetrischen Protostern zwei Bereiche unterschieden werden: den Kern, der sich praktisch in hydrostatischen Gleichgewicht befindet, und die Hülle, deren Materie mit Freifallgeschwindigkeiten auf den Kern herabfällt. Kern und Hülle sind durch eine Stoßfront getrennt.

In der Hülle ist die mittlere freie Weglänge eines Photons mit dem Radius des Protosterns vergleichbar, so daß die Krümmung der Atmosphäre im Strahlungstransportproblem explizit berücksichtigt werden muß. Dieser Punkt ist in den theoretischen Kollapsrechnungen beachtet worden. Die Diffusionsapproximation, die von mehreren Autoren benutzt worden ist, ist unter Voraussetzung von sphärischen Symmetrie abgeleitet (siehe z.B. Schwarzschild 1958).

Eine andere Voraussetzung, die in der Diffusionsapproximation gemacht wird, ist aber die Eddingtonsche Näherung, die im sphärischen Fall sehr ungenau wird (Chapman 1966).

Die totale optische Tiefe der Hülle variiert mit der Zeit: während der ersten Entwicklungsphase, nachdem sich der Kern gebildet hat, ist die Hülle optisch dicht für sichtbares Licht. Die vom Kern emittierte Leuchtkraft wird durch den Staub absorbiert und im Infraroten reemittiert. Am Ende des Kollapses ist der größte Teil der Materie vom Kern eingefangen worden, so daß der Kern beginnt, sichtbar zu werden. Während dieser Phase besitzt das Spektrum zwei Komponenten: die sichtbare Emission aus dem Kern und die infraroten Reemission des Staubes, der noch in den äußeren Schichten vorhanden ist.

Um die spektrale Verteilung der Emission zu berechnen, müssen wir die sphärische Transportgleichung für jede Frequenz unter der Bedingung radiativen Gleichgewichtes integrieren. Das andere Ziel, daß wir erreichen möchten, ist die Bestimmung einer realistischen Temperaturverteilung in der Hülle. Dazu müssen wir das Lösungsverfahren des radiativen Transportes mit dem hydrodynamischen Entwicklungsprogramm von Appenzeller und Tscharnuter kombinieren. Mit der vom Strahlungstransportprogramm gelieferten Temperaturverteilung berechnet dann das hydrodynamische Programm für jeden Zeitschritt die anderen Zustandsgrößen des Protosternes. Hierbei werden zwei verhältnismäßig umfangreiche Programme gekoppelt. Praktische Betrachtungen wie Rechenzeit und verfügbare Speicherplatz sind also von Bedeutung für die Wahl des Lösungsverfahren im Strahlungstransportproblem.

Im nächsten Abschnitt wollen wir die approximierte Lösungen dieses Problems diskutieren, die in den früheren Protosternentwicklungsrechnungen gemacht wurden.

2.3 Approximationen für den Strahlungstransport in den hydrodynamischen Rechnungen

Larson (1969a) und Appenzeller und Tscharnuter (1974, 1975) benutzen die Diffusionsapproximation

$$L_r = - \frac{64\pi\sigma r^2}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \qquad (2.1)$$

in der ganzen Wolke. Da (2.1) unter der Annahme abgeleitet wird, daß das Strahlungsfeld nahezu isotrop ist, wird der Strahlungstransport in den äußeren, optisch dünnen Atmosphärenschichten durch (2.1) nicht gut beschrieben. Larson (1969a) diskutierte die Fehler, die dadurch hervor gerufen werden. Er weist darauf hin, daß in der ersten Phase des Kollapses die Wolke optisch dünn ist. Deshalb muß wegen (2.1) die Temperatur konstant gleich den angenommenen Randwert sein. Da der Kollaps in dieser Phase isotherm vor sich gehen soll, ist hier die Verwendung von (2.1) nicht kritisch. Aber in späteren Phasen der Entwicklung heizt die Leuchtkraft des Kerns die äußeren Schichten des Protosternes auf. Dir Temperatur, die durch (2.1) berechnet wird, ist jedoch in diesem Gebiet viel kleiner als die, die man durch eine exakte Integration der Transportgleichung erhalten würde.

Larson schließt daraus, daß die Dynamik des Kollapses für einen 1 $M_\odot$ Protostern durch die Verwendung von (2.1) nicht stark beeinflußt werden sollte, da die Materie der Hülle sich praktisch in freiem Fall befindet. Natürlich gilt dieser Schluß nicht im Falle eines massereichen Protosterns, in dem Folgen auf die dynamische Entwicklung zu erwarten sind.

In einer späteren Veröffentlichung konstruiert Larson (1972a) eine Temperaturverteilung, indem er die Ausdrücke für T^4 addiert, die für die optisch dichten und optisch dünnen Grenzfälle gelten. Für den Fall einer großen optischen Tiefe wird (2.1) benutzt; bei einer kleinen optischen Tiefe wird das Strahlungsfeld angenommen als das einer Punktquelle der Leuchtkraft L im Abstand r. Für den grauen Fall hat man dann:

$$T^4 = \frac{L}{16\pi\sigma r^2}$$

Addiert man die beiden Ausdrücke für T^4, hat man dann für L:

$$(2.2)\quad L = -\frac{64\pi\sigma r^2 (T^4 - T_o^4)}{3K\rho T}\frac{dT}{dr}\left[1 - \frac{4}{3}\frac{dT}{K\rho T dr}\right]^{-1}$$

wobei T_o eine Konstante ist.

Dieser Gleichung kann in den dynamischen Rechnungen an die Stelle der Diffusionsgleichung (2.1) gesetzt werden. Die Temperaturverteilung, die bei diesem Verfahren berechnet wird, erweist sich als überraschend genau: die Abweichung von der detaillierten grauen Lösung von Hummer und Rybicki (1971) beträgt nur ca. 13% in T^4.

Das Lösungsverfahren des radiativen Transports, das in der Arbeit von Nakano et al. (1970) benutzt wurde, stellt eine noch bessere Näherung an die exakte Lösung. Um die Intensität I in dem optisch dünnen Gebiet zu finden, integrieren Nakano et al. die Transportgleichung:

$$\frac{dI}{ds} = \kappa\rho\,(B - I) \tag{2.3}$$

längs einer Schar paralleler Tangenten an die Radiusschichten. Was das optisch dichte Gebiet betrifft, so benutzen sie die Diffusionsgleichung (2.1). Die Grenze zwischen beiden Gebieten wird durch zwei Bedingungen bestimmt:

$$\left| \frac{B(r) - I(r,\pi)}{I(r,\pi)} \right| < 0.2 \quad \text{und} \quad \tau > 4$$

wobei τ die radiale optische Tiefe und $I(r,\pi)$ die Intensität in der Richtung zum Zentrum ist. Die erste Bedingung prüft die Genauigkeit der berechneten Flüsse, die zweite wird durch die Randbedingung gegeben.

Wenn $I(r,\theta)$ bekannt ist, kann man die zweite Momentgleichung integrieren, um den Fluß zu berechnen:

$$F(r) = \int_{\Omega} I(r,\theta)\cos\theta\, d\omega$$

Nakano et al., sowie alle anderen Autoren, betrachten nur den Fall einer grauen Atmosphäre, der eine relativ gute Näherung der Temperaturverteilung liefert. Der graue Fall erlaubt aber nicht, die beobachtbaren Eigenschaften einer Atmosphäre (z.B. das kontinuierliche Spektrum) zu beschreiben (s. unten); es ist also notwendig, len Fall einer nicht-grauen Atmosphäre zu berücksichtigen. Ein Verfahren zur Lösung dieses Problems wird im nächsten Kapitel dieser Arbeit angegeben.

Bevor wir dazu kommen, muß noch die Arbeit von Larson (1969b) erwähnt werden. In dieser Arbeit wird das emittierte Spektrum eines Protosterns "statisch" berechnet, d.h. unabhängig von der dynamischen Entwicklung.

Unter der Voraussetzung, daß das Produkt von Dichte und Opazität mit dem Radius variiet wie:

$$\kappa_\lambda \rho = \kappa_\lambda r^{-n} \tag{2.4}$$

integriert Larson die Transportgleichung. Die Temperaturverteilung für den nicht-grauen Fall wird analog zur Gleichung (2.3) abgeleitet. Für die Abhängigkeit der Opazität von der Wellenlänge wird ein Potenzgesetz vorausgesetzt.

$$\kappa_\lambda = \kappa_0 \lambda^{-p} \tag{2.5}$$

In Gleichung (2.4) wird n so gewählt, daß die in den Modellrechnungen erhaltene Dichteverteilung möglichst gut approximiert wird.

Unter diesen Bedingungen kam Larson zu folgenden Ergebnissen:

das graue Spektrum (p = 0 in (2.5)) ist viel breiter als das eines schwarzen Körpers; das emittierte Spektrum wird mit zunehmendem p enger, und zwar noch enger als das Spektrum eines schwarzen Körpers. Der Grund dafür ist folgender: nimmt p zu, dann nimmt κ_λ bei kleinen Wellenlängen zu, während es bei großen Wellenlängen abnimmt. Dann wird die Strahlung, die von den heißen Teilen der Wolke herkommt, immer mehr absorbiert. In derselben Weise wird die Abstrahlung aus den äußeren Schichten reduziert, wenn p zunimmt, weil Opazität und Emission im Bereich der langen Wellenlängen kleiner werden. Da der Verlauf der Staubopazität einem Wert p zwischen 1 und 2 entspricht, schließt Larson daraus, daß eine graue Atmosphäre auch als grobe Lösung des Strahlungstransportproblems nicht andwendbar ist.

Die von Larson erhaltene spektrale Entwicklung eines Protosterns werden wir im letzten Kapitel dieser Arbeit mit unseren Ergebnissen vergleichen.

2.4 Ausgedehnte sphärische Atmosphären

Der Begriff einer ausgedehnten Atmosphäre ist wahrscheinlich von Kosirev (1934) als erstem eingeführt worden, um beobachtete Spektren von Wolf-Rayet Sternen erklären zu können. Er bemerkte, daß die Temperatur, die durch He II-Linien bestimmt werden konnte, viel größer war als die, die man durch Wasserstofflinien berechnen konnte. Solch ein UV-Exzeß kann erklärt werden, indem

man annimmt, daß die Temperatur der äußeren Schichten des Sterns als Funktion von τ schneller zunimmt als bei üblichen Atmosphären. So kam Kosirev auf den Gedanken, daß die äußeren Schichten der WR-Sterne sehr ausgedehnt sein müßten und daß folglich der Radius mit τ stark variierte. Das hatte zur Folge, daß der Temperaturgradient viel größer als der einer plan-parallelen Atmosphäre sei.

Die unter Berücksichtigung der sphärischen Geometrie von Kosirev (1934) und Chandraskhar (1934) durchgeführten Rechnungen zeigen, obwohl sie die Eddingtonsche Näherung benutzen, die im sphärischen Fall nicht gut verwendbar ist, daß ausgedehnte Atmosphären ein flacheres Kontinuum produzieren als plan-parallele Atmosphären mit derselben effektiven Temperatur.

Ein weiterer Schritt wurde dann von Chapman (1966) vollzogen, als er darauf hinwies, daß die Strahlungsintensität als Funktion von θ immer enger um $\theta = 0$ konzentriert wird, wenn τ abnimmt, so daß für $\tau \approx 0$ gilt:

$$J(r) \approx H(r) \approx K(r)$$

Mit anderen Worten: die Eddingtonsche Näherung ist in ausgedehnten Atmosphären nicht mehr verwendbar. Die meisten der früheren Arbeiten über dieses Thema verloren dadurch plötzlich ihren Wert.

Darüberhinaus betonte Chapman nachdrücklich, daß keine allgemeine Lösung für die Temperaturverteilung in einer ausgedehnten Atmosphäre existiert , auch nicht für den grauen Fall, weil das Strahlungsfeld und folglich

die Temperatur des radiativen Gleichgewichts von der Verteilung der Opazitätsquellen abhing.

Diese Tatsache, sowie die Ungültigkeit der Eddingtonschen Näherung lassen leicht erkennen, daß die Behandlung sphärischer Atmosphären kein einfaches Problem ist. Es sei noch hervorgehoben, daß der Radius des Sterns, der z.B.durch die Bedingung $\tau_\lambda = 1$ definiert wird, im Falle einer ausgedehnten Atmosphäre stark mit λ variiert, so daß Begriffe wie effektive Temperatur oder Schwerkraft an der Oberfläche nicht mehr eindeutig sind.

Beim Integrieren der Transportgleichung mit einem Absorptionskoeffezienten pro Volumen-Einheit

$$k(r) \equiv k\rho = \alpha r^{-n} \tag{2.6}$$

gab Chapman (1966) eine Lösung für eine unendliche Atmosphäre für $n = 3$ an.

Larson (1969b) benutzte in der oben erwähnten Arbeit eine ähnliche Lösungsmethode wie Chapman und gab eine Lösung für $n = 3/2$ an.

An dieser Stelle seien Huangs Arbeiten (1969a,b) kurz diskutiert, da sie mehreren kürzlich erschienenen Veröffentlichungen zugrunde liegen. Huang befaßt sich mit dem Fall einer grauen, staubgefüllten, sphärischen Atmosphäre. Um die Reemission des Staubes im Infraroten berücksichtigen zu können, betrachtet er für seine Rechnungen den Strahlungstransport in zwei Bereichen: dem visuellen Bereich und dem infraroten Bereich. So lautet seine physikalische Formulierung: zunächst haben

wir im visuellen Bereich nicht-konservative und kohärente Streuung; weiterhin muß radiatives Gleichgewicht für die Summe der absorbierten visuellen Strahlung herrschen. Die Verbindung zwischen den beiden Strahlungsfeldern liefert der absorbierte Teil der visuellen Strahlung, der zugleich die Energiequelle für die infrarote Strahlung ist.

Huang gibt so eine analytische Lösung dieses Problems, und zwar unter Verwendung der Eddingtonschen Näherung (wie wir wissen, ist diese Näherung im Falle sphärischer Geometrie sehr ungenau) und eines exponentiellen Opazitätsgesetzes.

Diese Methode wurde dann von Apruzese (1974) verallgemeinert: er benutzte zehn spektrale Bereiche von konstanter Albedo, arbeitete aber immer noch im Rahmen der Eddingtonschen Näherung. Unter der Voraussetzung, daß der Staub in der Hülle homogen verteilt ist und grau absorbiert, fügt Apruzese als Anfangswert das beobachtete Spektrum des Be Sterns HD 45677, der einen starken Exzeß im IR zeigt (Swings und Allen 1971) in sein Programm ein, und integriert die Strahlungsgleichung von außen nach innen, um das wahre Spektrum des Sterns herauszufinden. Seine Ergebnisse zeigen einen Unterschied von einem halben Spektraltyp mit dem akzeptierten Be IV Spektrum von HD 45677. Apruzese erklärt dies, indem er behauptet, die Rückstrahlung sei dafür verantwortlich.

Die Rückstrahlung stellarer Atmosphären durch zirkumstellare Staubhüllen wurde bereits von Burger und Collins (1973) diskutiert. Sie betrachten einen Stern, der von

einer abgetrennten, optisch-dichten Staubwolke umhüllt ist. Die infrarote Strahlung der Wolke durchstrahlt die Atmosphäre so, daß der einfallende Strahlungsfluß dem Netto-Fluß in der Atmosphäre ungefähr gleich ist. Daraus ergibt sich eine Aufheizung der Atmosphäre, die zur Bildung einer chromosphärischen Schicht führt, in der die Temperatur in Richtung auf die Oberfläche zunimmt. In dem von Burger und Collins betrachteten Modell entsteht das kontinuierliche Spektrum in den tiefen, ungestörten Schichten der Atmosphäre. Ein merklicher UV-Exzeß und Emissionslinien bilden sich in der Chromosphäre; der IR-Exzeß wird durch die thermische Emission der Staubhülle hervorgerufen. Dieses Modell reproduziert die Haupteigenschaften der T-Tauri spektren.

In seinen letzten beiden Arbeiten beseitigt Apruzese (1975a,b) die Eddingtonsche Näherung aus seinem Modell, indem er die Eddingtonschen Faktoren in einem ad hoc Verfahren für jedes Frequenzband berechnet. Die Genauigkeit, die er so erreicht, scheint viel besser zu sein als unter der Annahme der Eddingtonschen Näherung. Außerdem berücksichtigt Apruzese den Fall nicht-grauer Staubextinktion. So berechnet er die Staubopazitäten, die nötig sind, um die beobachteten spektralen Verläufe mehrerer Objekte mit starkem IR-Exzeß zu erklären. Die Ergebnisse scheinen darauf hinzudeuten, daß die Emissivität der Staubteilchen, die im fernen Infraroten notwendig ist, ziemlich groß ist im Vergleich mit den Emissivitäten im nahen Infraroten oder im Visuellen. Mögliche Ursachen dafür könnten die Anwesenheit großer Teilchen ($d \gtrsim 0.4\mu$)

oder eines beträchtlichen Anteil von Silikaten sein (Gilman 1974). Die Anreicherung von großen Staubteilchen in zirkumstellaren Hüllen im Vergleich zum interstellaren Medium könnte hervorgerufen werden durch die stärkere Wirkung des Strahlungsdruckes auf die kleinen Teilchen oder ihre bevorzugte Verdampfung. Eine andere interessante Eigenschaft der Modelle von Apruzese ist, daß die starke 10 μ Emission, die man in einigen Objekten beobachtet und die durch die Anwesenheit von Silikaten erklärt wurde (Gilman 1974), unter bestimmten Bedingungen ohne eine entsprechende Spitze in den Emissivitätsverlauf der Staubkörner reproduziert werden konnte. Apruzese (1975c) erklärt dieses Ergebnis in folgender Weise: Emissionsspitzen im Spektrum können durch zwei Prozesse entstehen: entweder durch eine entsprechende Spitze im Emissivitätsprofil (Silikaten) oder durch die Kombination eines monoton mit der Wellenlänge abnehmenden Emissivitätsprofils und einer im 10 μ -Bereich stark zunehmenden Ergiebigkeit, die durch die Plancksche Kurve gegeben wird. Dieser zweite Effekt kann offensichtlich nicht für alle Emissionsspitzen verantwortlich sein, sonst würden wir solche Spitzen für verschiedenen Wellenlängen beobachten (verschiedenen Geometrie-Temperatur Kombinationen entsprechend). Auf die Anwesenheit von Silikaten in bestimmten Objekten kann man nur schließen, wenn die 10μ- sowie die 18μ -Emissionsspitzen zu sehen sind.

Eine andere interessante Arbeit ist die leider noch nicht veröffentliche Dissertation von Sieber (1974).

In seiner Arbeit berechnet Sieber die detaillierte chemische Zusammensetzung einer Protosternhülle. Dabei berücksichtigt er 14 Elemente sowie zahlreiche Moleküle und vier staubbildende Substanzen. Dann berechnet er die monochromatische Opazität in der Wolke. Damit und mit den von Larson (1969b) abgeleiteten Dichte- und Temperaturverteilung in der Protosternhülle löst dann Sieber das Strahlungstransportproblem. Dabei benutzt er die Eddingtonsche Näherung. Seine Ergebnisse vergleicht er mit dem beobachteten Spektrum des Becklin-Neugebauer Objektes: bis 8 μ ist die Übereinstimmung sehr gut, bei den längeren Wellenlängen treten wesentliche Unterschiede auf, die auf verschiedenen Häufigkeitenverhältnisse der Elemente (z.B. der Staubbildenden Substanzen)hinweisen. Das von Sieber benutzte Lösungsverfahren des Strahlungstransports hat zwei Nachteile: zunächst einmal ist das radiative Gleichgewicht nicht gewährleistet; Sieber findet aber Abweichungen von der Flußkonstanz von höchstens 60% in seinen Rechnungen. Ferner wird von ihm die Eddingtonsche Näherung verwendet; dennoch zeigen unsere Rechnungen, daß in einer großen Teil der Wolke $J(r) \approx K(r)$. Diese beiden Nachteile könnte man eliminieren, indem man die von Sieber abgeleiteten monochromatischen Opazitäten in dem von uns entwickelten Programm verwenden würde.

Cassinelli (1971) entwickelte eine auf der S_n- Methode von Carlson und Lathrop (1968) beruhende Prozedur, die zwar erlaubt, eine mit dem Radius willkürlich variiende Opazität zu behandeln, die aber die Eddingtonsche Näherung im Temperatur-Korrekturverfahren verwendet.

Alle bis jetzt erwähnten Lösungsverfahren des Strahlungstransports in sphärischen Atmosphären (bis auf die letzte Verbesserung der Methode von Apruzese (1975a,b)) beruhen auf

der Eddingtonsche Näherung und/oder einem Potenzgesetz für die Opazität als Funktion des Radius. Für unsere Zwecke müssen wir aber eine Lösung finden, die von diesen Annahmen frei ist. Im folgenden werden wir über solche Lösungsverfahren kurz referieren.

Allgemeine Lösungsverfahren wurden unter anderem von Peraiah und Grant (1973) und Schmidt-Burgk (1975) entwickelt. Die elegante Integral-Methode von Schmidt-Burgk wurde benutzt, um graue, statische ausgedehnte Atmosphären zu berechnen. (Hundt et al. 1975, Schmidt-Burgk und Scholz 1975). In diesen Arbeiten wird gezeigt, daß zwei Hauptgruppen von Sternen ausgedehnte statische Atmosphären haben können: Sterne mit $1 \lesssim M/M_{\odot} \lesssim 7$ in der Endphase ihrer Entwicklung längs der Hayashi-Grenze und Sterne mit $0.3 \lesssim M/M_{\odot} \lesssim 1$, insbesondere blaue helle Halo-Sterne wie Barnard 29. Ferner wird darauf hingewiesen, daß typische Wolf-Rayet-Sterne wahrscheinlich keine ausgedehnte statische Atmosphären haben.

Hummer und Rybicki (1971) legten eine numerische Methode dar, die ein Iterationsverfahren für den Eddingtonschen Faktor $f(r) = K(r)/J(r)$ benutzt, um genaue Lösungen des grauen Falls zu berechnen. Diese numerische Prozedur wurde von Hummer, Kunasz und Kunasz (1973) fortgeführt und verfeinert. Dieses Verfahren zeichnet sich durch breite Anwendbarkeit aus und wurde für die Lösung mehrerer Probleme in sphärischer Geometrie verwendet: Kunasz und Hummer (1974a,b) z.B. geben Lösungen zum Problem der Linienbildung sowohl für statische Atmosphären als auch in Anwesenheit eines Geschwindigkeitsfeldes. Mihalas und Hummer (1974) stellten eine Methode zur Behandlung der NLTE Problems in sphärischer Geometrie auf, die für die Integration der Transportgleichung das Verfahren von Hummer et al. (1973) gebraucht.

Die Lösungsmethode von Hummer und Rybicki (1971) sowie Hummer et al. (1973) kann willkürliche Opazitätsverläufe behandeln. Weiterhin sind Rechenzeit und Speicherbedarf so angelegt, daß man auch den nicht-grauen Fall rechnen kann. Aus diesen Gründen ist das hier verwendete Verfahren für die formale Integration der Transportgleichung der von Hummer und Rybicki sehr ähnlich. Die Iterationprozedur für den Eddingtonschen Faktor gilt für Ergiebigkeiten, die lineare Funktionen vom ersten Moment J(r) sind. Auf diese Weise bekommt man aber im nicht-grauen Fall keine direkte Verbindung zwischen Strahlungsfeld und Temperaturverteilung des emittierenden Staubes. Wir mußten also ein iteratives Verfahren entwickeln, das eine solche Verbindung ermöglicht.

Eine detaillierte Beschreibung unseres Verfahrens wird im nächsten Kapitel gegeben.

3. Lösungsverfahren des radiativen Transports

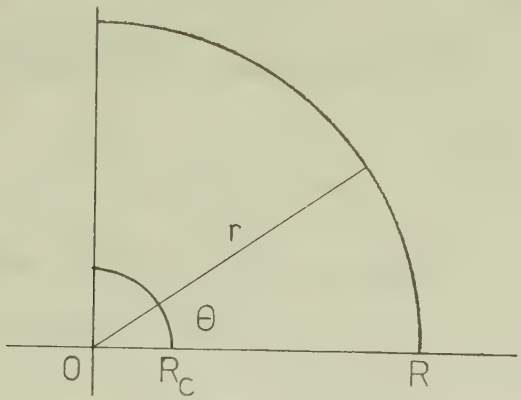
3.1 Einleitung

In sphärischer Geometrie lautet die Transportgleichung:

$$(3.1)\quad \mu \frac{\partial}{\partial r} I_\lambda(r,\mu) + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} I_\lambda(r,\mu) = -k_\lambda(r)\left(I_\lambda(r,\mu) - S_\lambda(r)\right)$$

wobei $I_\lambda(r,\mu)$ die Intensität der Strahlung (für die Wellenlänge λ im Abstand r vom Zentrums) ist, die längs einer Linie propagiert, die einen Winkel θ mit dem Radiusvektor einschließt (s. Abb. 3.1).

Abb. 3.1



In (3.1) haben wir zur Abzürzung $\mu = \cos\theta$ geschrieben. $k_\lambda(r)$ ist der Absorptionskoeffizient pro Volumeneinheit für die Wellenlänge λ. $S_\lambda(r)$ ist die Ergiebigkeit, d.h. der Quotient von Emissivität zum Absorptionskoeffizient.

Zunächst wollen wir (3.1) von einem inneren Radius R_c bis zum äußeren Rand R integrieren. Zu diesem Zweck müssen wir $k_\lambda(r)$ und $S_\lambda(r)$ als Funktionen von r vorgeben (dabei wird vorausgesetzt, daß Emission und Absorption isotrop sind). Weiter müssen wir Randbedingungen für die einfallende Strahlung an den Stellen R_c und R vorgeben. Dann können wir durch ein numerisches Verfahren die Transportgleichung (3.1) integrieren. So berechnen wir $I_\lambda(r,\mu)$ als Funktion von r und μ für jede Wellenlänge. Diese Integration der Transportgleichung wird im Abschnitt 3.2 beschrieben.

Kennen wir $I_\lambda(r,\mu)$ in Form einer dreidimensionalen Matrix für bestimmte Werte (r_i,μ_j,λ_k), dann können wir die Momente der Intensität berechnen, die durch die folgenden Gleichungen definiert werden:

$$J_\lambda(r) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\lambda(r,\mu)\, d\mu \tag{3.2}$$

$$H_\lambda(r) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\lambda(r,\mu)\, \mu\, d\mu \tag{3.3}$$

$$K_\lambda(r) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\lambda(r,\mu)\, \mu^2\, d\mu \tag{3.4}$$

Die Integration der Momente ist im Abschnitt 3.3 beschrieben.

Um eine erste Lösung der Gleichung (3.1) zu berechnen, haben wir eine approximierte Temperaturverteilung benutzt (Im allgemeinen wird diese Approximation durch eine lineare Extrapolation aus den zwei vorhergehenden Modellen berechnet). Man kann also nicht erwarten, daß die berechnete Lösung der Gleichung (3.1) die Bedingung des radiativen Gleichgewichts erfüllt; diese Bedingung gewährleistet, daß die Lösung der Transportgleichung den Energiesatz erfüllt. Die mathematische Formulierung dieser Bedingung ist (Mihalas 1970):

$$\int_0^\infty k_\lambda(r)\, J_\lambda(r)\, d\lambda = \int_0^\infty k_\lambda(r)\, S_\lambda(r)\, d\lambda \tag{3.5}$$

oder, in einer äquivalenten Schreibweise

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 H(r)\right) = 0 \tag{3.6}$$

wobei $H(r)$ der integrierte Fluß ist, d.h.

$$H(r) = \int_0^\infty H_\lambda(r)\, d\lambda \tag{3.7}$$

Im allgemeinen Fall wird die Ergiebigkeit so geschrieben:

$$S_\lambda(r) = (1-\epsilon)\, J_\lambda(r) + \epsilon\, B_\lambda(r) \tag{3.8}$$

Der erste Term rechts stellt die Streuung dar, der zweite Term entspricht der thermischen Emission. $B_\lambda(r)$ ist die Plancksche Funktion der Temperatur $T(r)$. LTE wird hier vorausgesetzt. Da im allgemeinen die Bedingung (3.5) nach der ersten Iteration der Transportgleichung nicht erfüllt ist, muß man ein iteratives Verfahren benutzen, daß die Temperatur so korrigiert, daß sich eine konstante Leuchtkraft in der Atmosphäre einstellt. Hier sind wir in der Wahl eines Temperatur-Korrektur-Verfahrens durch die Tatsache begrenzt, daß die Eddingtonsche Näherung in sphärischer Geometrie nicht verwendet sein kann. Die hier benutzte Prozedur wird im Abschnitt 3.4 beschrieben.

Wenn eine Energiequelle in der Atmosphäre vorhanden ist, müssen die Gleichungen (3.5) oder (3.6) durch (3.9) ersetzt werden.

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)\, \epsilon(r) \tag{3.9}$$

wobei L_r die Leuchtkraft, $\rho(r)$ die Dichte, und $\epsilon(r)$ die Energieproduktion beim Radius r sind.

In den späteren Entwicklungsphasen des Protosternes befindet sich die Stoßfront innerhalb der Atmosphäre.

Die Rechnungen zeigen, daß die Leuchtkraft des Protosterns fast ausschließlich durch die Umwandlung der kinetischen Energie der einfallenden Materie in Strahlung innerhalb der Stoßfront produziert wird. Im Abschnitt 3.5 werden wir zeigen, wie das mathematische Verfahren modifiziert werden soll, um diese Prozesse zu berücksichtigen.

Bevor wir mit der praktischen Beschreibung des Lösungsverfahrens beginnen, wollen wir uns noch ins Gedächtnis rufen, daß wir das Spektrum eines Protosterns für eine nicht-graue Opazität berechnen wollen. Dazu teilen wir den für uns interessanten Wellenlängenbereich in einer vorgegebene Zahl von Intervallen. Die Transportgleichung für jedes Intervall lautet dann

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \int_{\Delta\lambda} I_\lambda(r,\mu)\, d\lambda + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{\Delta\lambda} I_\lambda(r,\mu)\, d\lambda = -\int_{\Delta\lambda} k_\lambda(r)\,(I_\lambda(r,\mu) - S_\lambda(r))\, d\lambda \tag{3.10}$$

Nehmen wir an, daß ein mittleres Opazitätskoeffizient für jedes Intervall definiert wird, dann ist (3.10) formal zu (3.1) äquivalent, wobei

$I_\lambda(r,\mu)$ durch $\int_{\Delta\lambda} I_\lambda(r,\mu)\, d\lambda$ ersetzt wurde

$S_\lambda(r)$ durch $\int_{\Delta\lambda} S_\lambda(r)\, d\lambda$ ersetzt wurde, und

$k_\lambda(r)$ durch $\overline{k_{\Delta\lambda}(r)}$ ersetzt wurde.

Wir definieren also

$$\tilde{X}_\lambda(x) \equiv \int_{\Delta\lambda} X_\lambda(x)\, d\lambda$$

Dabei steht $\tilde{X}_\lambda$ für jede der Größen, die in der folgenden mathematischen Herleitung auftauchen. Dabei werden wir im Folgendem das Zeichen $\sim$ fortlassen, wenn es nicht zum Verständis des Textes notwendig ist.

Im Rest des Kapitels beschreiben wir also die Lösungsmethode des Strahlungstransportproblemes in Protosternhüllen. Nehmen wir jetzt an, daß wir für irgendein vorgegebenen Anfangsmodell durch dieses Verfahren eine Lösung des Strahlungstransport erhalten haben; dann kennen wir das emittierte Spektrum des Protosterns zum betrachteten Zeitpunkt und wir haben die Temperaturverteilung in der Hülle. Diese Temperaturverteilung wird dann in das hydrodynamische Programm eingegeben, das die anderen Zustandsgrößen des Protosterns zum betrachteten Zeitpunkt berechnet. In den inneren, optisch dichten Schalen wird das Strahlungstransport durch die Diffusionsgleichung approximiert.

Ist auf diese Weise die Berechnung eines Modells zum Zeitpunkt t fertiggestellt, erfolgt der Übergang zum nächsten Modell $t + \Delta t$.

Als Anfangsmodell für die Berechnung der Entwicklung kann man irgendein Modell wählen, das mit der Diffusionsapproximation durch die ganze Wolke berechnet wurde. Die so gewonnene Temperaturverteilung ist als erste Approximation für die detaillierte Lösung des Strahlungstransports brauchbar.

3.2 Formale Lösung der Transportgleichung

3.2.1 Koordinatentransformationen

Das vorliegende Integrationsverfahren beruht auf Arbeiten von Hummer und Rybicki (1971) und Hummer, Kunasz, und Kunasz (1973).

Zunächst werden die Variablen r und ρ in (3.1) durch r/R_c und ρ/ρ_c ersetzt. Hier ist ρ die Dichte der Wolke, die in der Beziehung

$$k_\lambda(r) = \rho(r)\, K_\lambda(r)$$

auftaucht. K_λ ist die Opazität in cm^2/g, R_c ist der Radius des inneren Randes, ρ_c die Dichte dort. Mit diesen neuen Variablen lautet (3.1)

$$(3.11)\quad \mu \frac{\partial I_\lambda}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_\lambda}{\partial \mu} = -K_\lambda \rho(r) \rho_c R_c (I_\lambda - S_\lambda)$$

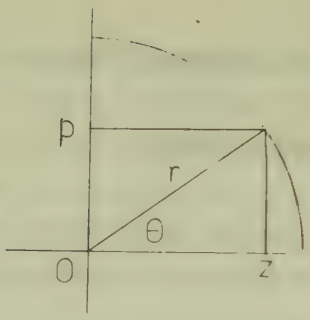
Jetzt ersetzen wir r und μ durch die zylindrischen Koordinaten p und z, die so definiert werden:

$$p \equiv r \sin\theta$$

$$z \equiv \sqrt{r^2 - p^2}$$

p wird in Analogie zur Atomphysik oft als Stoßparameter bezeichnet. In Abb.3.2 sind die neuen Koordinaten eingetragen.

Abb. 3.2



Setzen wir p = konst., dann läßt sich (3.11) schreiben als:

$$\frac{dI_\lambda(p,z)}{dz} = -k_\lambda \rho(r)\rho_c R_c \left(I_\lambda(p,z) - S_\lambda(r)\right) \tag{3.12}$$

wobei für $S_\lambda(r)$ eigentlich $S_\lambda(r(p,z))$ geschrieben sein sollte.

Wir definieren jetzt die monochromatische optische Tiefe bei konstanter p :

$$d\tau_\lambda = k_\lambda(r)\,\rho(r)\,\rho_c R_c\,dz \tag{3.13}$$

Wenn $I^+(p,z)$ die Intensität der Strahlung in der positiven z -Richtung und $I^-(p,z)$ die Intensität in der negativen z -Richtung ist, läßt sich (3.12) schreiben in der Form

$$\frac{dI^\pm(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda} = \pm\left(S_\lambda(r) - I_\lambda^\pm(p,\tau_\lambda)\right) \tag{3.14}$$

Die numerische Integration geschieht längs Linien konstanter Stoßparameter p . Die hier benutzte numerische Technik wurde zuerst von Feautrier (1964) entwickelt. Wir definieren

$$u_\lambda(p,\tau_\lambda) \equiv \frac{1}{2}\left[I_\lambda^+ + I_\lambda^-\right]$$

(3.15)

$$v_\lambda(p,\tau_\lambda) \equiv \frac{1}{2}\left[I_\lambda^+ - I_\lambda^-\right]$$

Die Gleichung (3.14) läßt sich dann in ein System von zwei Gleichungen aufteilen

$$\frac{du_\lambda(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda} = -v_\lambda(p,\tau_\lambda) \qquad (3.16)$$

$$\frac{dv_\lambda(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda} = u_\lambda(p,\tau_\lambda) - S_\lambda(r) \qquad (3.17)$$

das wiederum sich in der folgenden Gleichung zusammenfassen läßt:

$$\frac{d^2u_\lambda(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda^2} = u_\lambda(p,\tau_\lambda) - S_\lambda(r) \qquad (3.18)$$

Diese Gleichung wollen wir von $\tau_\lambda = 0$ am inneren Rand $r = 1$ bis $\tau_\lambda = \tau_\lambda^{max}$ zum äußeren Rand $r = \frac{R}{R_c}$ integrieren.

3.2.2 Randbedingungen

3.2.2.a Innere Randbedingung

i) Linien $p = \text{const.}$, die durch den Kern gehen

Es wird vorausgesetzt, daß der Kern des Protosterns Strahlung emittiert. Die Intensität $I_\lambda^c(p)$ dieser Strahlung sei als Funktion von λ und p bekannt. Aus (3.15) haben wir

$$I_\lambda^c(p) = u_\lambda(p,0) + v_\lambda(p,0) \tag{3.19}$$

Setzt man diesen Wert in (3.16) ein, so lautet die Randbedingung für $\tau_\lambda = 0$ für die durch den Kern gehenden Stoßparameter:

$$\left.\frac{du_\lambda(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda}\right|_{\tau_\lambda=0} = u_\lambda(p,0) - I_\lambda^c(p) \tag{3.20}$$

ii) Stoßparameter, die nicht durch den Kern gehen

In diesem Fall haben wir $I_\lambda^+(p) = I_\lambda^-(p)$ für $\tau_\lambda = 0$

d.h. $v_\lambda(p,0) = 0$

Wir können also (3.16) so schreiben:

$$\left.\frac{du_\lambda(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda}\right|_{\tau_\lambda=0} = 0 \tag{3.21}$$

Gleichung (3.21) ist die gewünschte Randbedingung für die Stoßparameter, die nicht durch den Kern laufen. (3.20) und (3.21) können folgendermaßen zusammengefaßt werden

$$\left.\frac{du_\lambda(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda}\right|_{\tau_\lambda=0} = \eta(p)\left[u_\lambda(p,0) - I^c_\lambda(p)\right] \tag{3.22}$$

mit $$\eta(p) = \begin{cases} 0, & p \geq 1 \\ 1, & p < 1 \end{cases}$$

Diese letzte Gleichung ist die allgemeine Randbedingung am inneren Rand der Atmosphäre.

3.2.2.b Äußere Randbedingung

Es wird vorausgesetzt, daß keine Strahlung auf dem äußeren Rand des Sterns einfällt, d.h. $I^-_\lambda(p,\tau^{max}_\lambda) = 0$ so daß

$$u_\lambda(p,\tau^{max}_\lambda) = v_\lambda(p,\tau^{max}_\lambda)$$

Unter dieser Bedingung wird (3.16):

$$\left.\frac{du_\lambda(p,\tau_\lambda)}{d\tau_\lambda}\right|_{\tau_\lambda=\tau^{max}_\lambda} = -u_\lambda(p,\tau^{max}_\lambda) \tag{3.23}$$

Diese Gleichung ist die gewünschte Randbedingung für $\tau_\lambda = \tau^{max}_\lambda$

Gleichungen (3.22) und (3.23) sind die in der Integration der Transportgleichung benutzten Randbedingungen. Die vom Kern emittierte Strahlung muß noch vorgegeben werden.

3.2.3. Die Differenzengleichungen

Die Differenzengleichungen sind die, die Hummer et al.(1973) benutzten. Es wird angenommen, daß die Funktionen $u(\tau)$ und $v(\tau)$ durch Polynomen dritten Grades dargestellt werden können. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß $u'(\tau)$ und $u''(\tau)$ stetig an den Stützpunkten:

$$\tau_j \ , \ j = 1,2,\dots Q$$

sind. Das sind genau die Voraussetzungen, die "cubic splines" definieren in dem Sinne von Ahlberg, Nilson und Walsh (1967).

Definieren wir:

$$u_j \equiv u(\tau_j)$$

$$M_j \equiv \left.\frac{d^2 u_j}{d\tau^2}\right|_{\tau=\tau_j}$$

$$h_j \equiv \tau_j - \tau_{j-1}$$

dann haben wir auf dem Intervall $\tau_{j-1} < \tau < \tau_j$ mit den oberen Annahmen

$$u''(\tau) = M_{j-1}(\tau_j - \tau) + M_j(\tau - \tau_{j-1})/h_j \qquad (3.24)$$

Integrieren wir zweimal, dann haben wir:

$$u''(z) = \left[-3M_{j-1}(z_j - z)^2 + 3M_j(z_j - z_{j-1})^2 \right.$$

(3.25)

$$\left. -(6u_{j-1} - M_j h_j^2) + (6u_j - M_j h_j^2) \right] / 6h_j$$

und

$$u(z) = \left[M_{j-1}(z_j - z)^3 + M_j(z - z_{j-1})^3 \right.$$

$$+ (6u_{j-1} - M_{j-1} h_j^2)(z_j - z)$$

(3.26)

$$\left. + (6u_j - M_j h_j^2)(z - z_{j-1}) \right] / 6h_j$$

Die Stetigkeit von $u'(z)$ an der Stelle z_j gibt die folgende Bedingung

$$u_{j-1} h_{j+1} - u_j(h_j + h_{j+1}) + u_{j+1} h_j =$$

(3.27)

$$\frac{1}{6} h_j h_{j+1} \left[h_j M_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1}) M_j + h_{j+1} M_{j+1} \right]$$

Schreiben wir jetzt die Gleichung (3,18) als

$$M_j = u_j - S_j$$

dann läßt sich (3.27) umformen:

$$u_{j-1}\left[h_{j+1} - \frac{1}{6} h_j^2 h_{j+1} \right]$$

$$- u_j \left[h_j + h_{j+1} + \frac{1}{3} h_j h_{j+1}(h_j + h_{j+1}) \right]$$

(3.28)

$$+ u_{j+1}\left[h_j - \frac{1}{6} h_j h_{j+1}^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{6} h_j h_{j+1} \left[h_j S_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1}) S_j + h_{j+1} S_{j+1} \right]$$

(3.28) ist die gewünschte Differenzengleichung für u_j .
Die Randbedingungen lassen sich schreiben als:

$$-u_1[6+2h_2^2+6\eta h_2]+u_2(6-h_2^2)$$

$$(3.29) \qquad = -h_2^2(2S_1+S_2)-6\eta h_2 I^c$$

für $\xi = \xi_1 = 0$

und

$$-u_{Q-1}(6-h_Q^2)+u_Q(6+6h_Q+2h_Q^2)$$

$$(3.30) \qquad = h_Q^2(2S_Q+S_{Q-1})$$

für $\xi = \xi_{max} = \xi_Q$

Die Differenzengleichung für v_j kann man in der Form

$$v_j = u_j\left(\frac{1}{3}h_{j+1}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)+u_{j+1}\left(\frac{1}{6}h_{j+1}-\frac{1}{h_{j+1}}\right)$$

$$(3.31) \qquad -h_{j+1}\left(\frac{1}{3}S_j+\frac{1}{6}S_{j+1}\right) \quad , j=1,2,\ldots Q-1$$

schreiben, mit der Bedingung

$$(3.32) \qquad v_Q = u_Q$$

an den äußeren Rand.

Der Fehler in diesem Differenzenschema ist von der Grössenordnung $O(h^2)$, auch für ungleiche Abstände $h_j \neq h_{j+1}$
Die Gleichungen (3.28), (3.29) und (3.30) haben die Form

$$(3.33)\qquad -A_j u_{j-1} + B_j u_j - C_j u_{j+1} = L_j$$

$$j = 1, 2, \ldots Q$$

für jeden Stoßparameter und jede Wellenlänge. Die Elemente der Matrix u_j können durch das folgende Gaußsche Eliminationsschema gefunden werden:
Wir beginnen mit

$$(3.34a)\qquad D_1 = C_1/B_1 \qquad \text{und} \qquad \nu_1 = L_1/B_1$$

und berechnen die D_j und ν_j , $j = 2, 3, \ldots Q$ aus

$$(3.34b)\qquad D_j = C_j/(B_j - A_j D_{j-1}) \,, \nu_j = \frac{L_j - A_j \nu_{j-1}}{B_j - A_j D_{j-1}}$$

Dann schreiben wir

$$(3.35a)\qquad u_{Q+1} = 0$$

und berechnen

$$(3.35b)\qquad u_j = \nu_j + D_j u_{j+1} \quad , j = Q, Q-1, \ldots 1$$

Wenn die u_j bekannt sind, dann berechnet man die v_j mit Hilfe von (3.31) und (3.32)

Die h_j werden durch numerische Integration berechnet. Dafür wird ein einfaches Trapezschema benutzt, und die Ergiebigkeit S_j wird vorgegeben (s. Abschnitt 4.1). Nachdem die Transportgleichung integriert worden ist, können wir die Momente der Intensität berechnen.

3.3 Momente des Strahlungsfeldes

Sind $\{u\}$ und $\{v\}$ in Form von zwei dreidimensionalen Matrizen

$$\{u(p_i, z_j, \lambda_k)\}$$

und

$$\{v(p_i, z_j, \lambda_k)\}$$

bekannt, dann können wir die Momente des Strahlungsfeldes berechnen, die folgendermaßen definiert werden:

(3.36) $$J_\lambda(r) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(r,\mu)\,d\mu$$

(3.37) $$H_\lambda(r) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v(r,\mu)\,\mu\,d\mu$$

(3.38) $$K_\lambda(r) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(r,\mu)\,\mu^2\,d\mu$$

Die Berechnung von u_j und v_j schreitet längs der Linien konstanter Stoßparameter fort. Im Gegenteil dazu verlangt die Integration der Momente eine Summierung über alle Stoßparameter bei konstantem Radius, d.h. daß eine unmittelbare Berechnung der Momente die Speicherung der ganzen Matrizen $\{u\}$ und $\{v\}$ verlangen würde. Das ist keine wünschenswerte Eigenschaft, da diese Matrizen relativ umfangreich sind.(In einem typischen Fall hat u 10.000 Matrixelemente für jede Wellenlänge). Man kann aber das Programm so gestalten, daß die Beiträge zu den Momentintegralen während der Integration der Transportgleichung aufsummiert werden.(Dann sinkt der Speicherbedarf für $\{u\}$ in demselben typischen Fall wie oben bis auf 200 Elemente pro Wellenlänge).

Mit den Variablen p und r kann man die Momentgleichungen umschreiben (Hummer und Rybicki, 1971):

$$J_\lambda(r) = \frac{1}{r}\int_0^r p(r^2-p^2)^{-\frac{1}{2}}\, u_\lambda(r,p)\, dp \tag{3.39}$$

$$H_\lambda(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r p\, v(p,r)\, dp \tag{3.40}$$

$$K_\lambda(r) = \frac{1}{r^3}\int_0^r p(r^2-p^2)^{\frac{1}{2}}\, u(p,r)\, dp \tag{3.41}$$

Wir nehmen jetzt an, daß für r = konst., $u(p, r$ = konst.)

sich durch einen quadratischen Ausdruck in p darstellen läßt:

$$u(p,r) = a p^2 + bp + c$$

Hier sind a, b und c Konstanten. Mit dieser Annahme kann man die Momente analytisch integrieren. Um den Beitrag zu den Momenten von $p=0$ bis zum ersten diskreten p-Wert zu berechnen, benutzt man die Tatsache, daß u eine gerade Funktion von p ist. Wir setzen also an

$$u(p) = u(0) + d p^2$$

wobei $u(0)$ und d aus den ersten zwei p-Werten berechnet werden. Ein analoger Ansatz wird für v gemacht. Diese Prozedur ist ziemlich genau für die Funktion u (die langsam um $\theta=0$ variiert), ist aber weniger befriedigend für v, das in diesem Bereich schneller variiert. In den praktischen Rechnungen wurde festgestellt, daß die Genauigkeit des Flußes in der Nähe des inneren Randes relativ stark vom obigen Ansatz für v abhängig ist. Die Genauigkeit kann man verbessern, indem man die Zahl der durch den Kern gehenden Stoßparameter vergrößert.

3.4 Das Temperatur-Korrekturverfahren

3.4.1 Das Iterationsverfahren

Die Bedingung des radiativen Gleichgewichts ist

$$(3.5) \qquad \int_0^\infty (J_\lambda(r) - S_\lambda(r))\, \kappa_\lambda \, d\lambda = 0$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß

$$S_\lambda(r) = B_\lambda(r)$$

d.h. die Ergiebigkeit sei die Plancksche Funktion für die lokale Temperatur. Da die Anfangstemperaturverteilung durch eine Näherung gegeben wird, wird im allgemeinen $B_\lambda(r)$ die Gleichung (3.5) nicht erfüllen. Nehmen wir also an, daß die Plancksche Funktion am Radius r, die die Gleichung (3.5) erfüllt, sich als

$$B_\lambda^*(r)$$

schreiben läßt, dann haben wir bis zur ersten Ordnung

$$(3.42) \qquad B_\lambda^*(r) = B_\lambda(r) + \frac{\partial B_\lambda(r)}{\partial T} \Delta T$$

Setzen wir (3.42) in (3.5) ein, dann können wir die Temperaturkorrektur ΔT berechnen:

$$(3.43) \qquad \Delta T = \frac{\int_0^\infty (J_\lambda(r) - B_\lambda(r))\, \kappa_\lambda \, d\lambda}{\int_0^\infty \kappa_\lambda \frac{\partial B_\lambda(r)}{\partial T} \, d\lambda}$$

Mit dieser verbesserten Temperatur können wir ein verbessertes Intensitätsfeld berechnen. In dieser Weise wird so lange iteriert, bis eine genügende Genauigkeit in der Konstanz des Flußes erreicht wird.

Dieses iterative Verfahren ist der Λ-Iteration der plan-parallelen Atmosphärentheorie äquivalent. Der wichtigste Nachteil der Λ-Iteration ist, daß sie keine Bedingung für den Fluß ist, sondern eine Bedingung für dessen Ableitung. Das heißt aber, daß die Temperaturkorrektur Null wird,wenn der Fluß konstant ist, auch wenn er nicht den gewünschten Wert erreicht hat. Der Erfolg dieser Iterationsmethode hängt also stark von der Wahl der inneren Randbedingung ab, die den gewünschten Fluß explizit angeben soll (Dieser Wert wird durch die im Inneren gültige Diffusionsapproximation geliefert). Ein anderer Nachteil der Λ-Iteration ist, daß sie sehr große Opazitätsunterschiede in den verschiedenen Frequenzenbereichen nicht behandeln kann. Mit dem hier benutzten Opazitätsgesetz zeigte sich aber, daß dieser Effekt nicht auftrat. In dieser Arbeit wurde solange iteriert, bis die Abweichungen von der Flußkonstanz nur noch höchstens 5% betrugen. Um diese Genauigkeit zu erreichen, waren vier bis sechs Iterationen notwendig.

3.4.2. Die innere Randbedingung

Zwei Randbedingungen sind benutzt worden: die erste ist eine lokale plan-parallele Diffusionsapproximation, die für die Anfangsiteration benutzt wurde, die zweite

ist eine sphärische Randbedingung, die das momentane Strahlungsfeld enthält. Sie wurde in den weiteren Iterationen verwendet.

3.4.2a Die plan-parallele Randbedingung

Die Grundannahme ist, daß die mittlere freie Weglänge der Photonen viel kleiner als r für alle Frequenzen ist. Das ist aber nicht immer den Fall für die längeren Wellenlängen, die vom Protostern emittiert werden, so daß eine sphärische Randbedingung für die zweite und die folgenden Iterationen benutzt wurde.

Unter der Annahme einer lokalen plan-parallelen Diffusionsapproximation kann man schreiben (Mihalas 1970)

$$I_\lambda(r=r_c,\mu) = B_\lambda(r=r_c) + \left.\frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau_\lambda}\right|_{r=r_c} \tag{3.44}$$

wobei r_c der Radius am inneren Rand ist
Jetzt nehmen wir an, daß man die Temperatur auf irgendeiner Skala der optischen Tiefe linear entwickeln kann. Sei α der Koeffizient dieser Entwicklung, dann können wir schreiben:

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau_\lambda} = \frac{\partial B_\lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \tau_\lambda} = \frac{\alpha}{\kappa_\lambda}\frac{\partial B_\lambda}{\partial T} \tag{3.45}$$

Der Strahlungsfluß bei der Wellenlänge λ ist

$$H_\lambda = \frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{\kappa_\lambda}\frac{\partial B_\lambda}{\partial T}\right)\Big|_{r=r_c} \tag{3.46}$$

Durch Integration bekommen wir

$$\frac{L}{16\pi^2 r_c^2} = \frac{\alpha}{3} \int_0^\infty \frac{1}{k_\lambda} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T}\Big|_{r=r_c} d\lambda \tag{3.47}$$

wobei L die gesamte Leuchtkraft ist.
Aus (3.47) berechnen wir α , dessen Wert in (3.44) eingesetzt wird. Dann haben wir

$$I_\lambda(r=r_c,\mu) = B_\lambda(r=r_c) + \frac{1}{k_\lambda} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T}\Big|_{r=r_c} \frac{3L}{16\pi^2 r_c^2 \int_0^\infty \frac{1}{k_\lambda} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T}\Big|_{r=r_c} d\lambda} \tag{3.48}$$

Dieser Ausdruck wird dann in (3.29) eingesetzt und wird bei der Integration der Transportgleichung verwendet.

3.4.2.b Die sphärische Randbedingung

In sphärischer Geometrie lautet bei konstantem Stoßparameter die Transportgleichung für I_λ^+:

$$\frac{dI_\lambda^+}{d\tau_\lambda} = S_\lambda - I_\lambda^+ \tag{3.14}$$

Diese Gleichung können wir direkt integrieren. Wir haben dann

$$(3.49) \qquad I_\lambda^+ e^{\tau_\lambda}\Big|_0^{\tau_\lambda} = \int_0^{\tau_\lambda} S_\lambda(t) e^t \, dt$$

Entwickeln wir jetzt B_λ um $\tau_\lambda = 0$ (in unserem Fall haben wir $\tau_\lambda = 0$ am inneren Rand) dann haben wir

$$B_\lambda(\tau) = B_\lambda(0) + \frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau_\lambda}\Big|_0 \tau_\lambda$$

und (3.49) bekommt die Form

$$(3.50) \qquad I_\lambda^+ = B_\lambda(0) - \frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau_\lambda}\Big|_{\tau_\lambda = 0}$$

Wie vorher schreiben wir

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau_\lambda} = \frac{\alpha}{\kappa_\lambda} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T}$$

Aus der Definition von u_λ und v_λ haben wir

$$I_\lambda^+ = u_\lambda - v_\lambda$$

und der Fluß am Radius r ist

$$(3.51) \qquad H_\lambda(r) = \int_0^1 v_\lambda(r) \mu \, d\mu = \int_0^1 (I_\lambda^+ - u_\lambda) \mu \, d\mu$$

Integrieren wir über alle Wellenlängen, dann ergibt sich

$$\frac{L}{16\pi^2 r_c^2} = \int_0^\infty d\lambda \int_0^1 (I_\lambda^+ - u_\lambda)\Big|_{r_c} \mu d\mu \tag{3.52}$$

r_c ist der Radius am inneren Rand.
Ersetzen wir in dieser Gleichung I_λ^+ durch den Wert (3.50) so bekommen wir α .
Die sphärische Randbedingung ist also

$$I_\lambda^+(r=r_c, p=konst.) = B_\lambda(r=r_c) - \frac{\alpha}{k_\lambda}\frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau}\Big|_{r=r_c}$$

(3.53) mit

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty B_\lambda(r=r_c)\,d\lambda + 2\int_0^\infty d\lambda \int_0^1 u_\lambda(r=r_c)\mu d\mu - \frac{L}{8\pi^2 r_c^2}}{\int_0^\infty \frac{1}{k_\lambda}\frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau}\Big|_{r_c} d\lambda}$$

3.5 Strahlungsproduktion innerhalb der Atmosphäre

Die Energieproduktion an der Stelle r sei $\epsilon(r)$ (erg $g^{-1}sec^{-1}$). Dann ist die über alle Wellenlängen integrierte Emissivität pro Gramm Materie und in den Raumwinkel $d\omega$:

$$j = \frac{k\sigma}{\pi} T^4 + \frac{\epsilon(r)}{4\pi} \tag{3.54}$$

wobei k der graue Absorptionskoeffizient ist. Der erste Term in dieser Gleichung stellt die thermische Emission

dar, der zweite, die in der Stoßfront zusätzlich produzierte Energie.

Um die spektrale Verteilung der Emissivität zu erhalten, mußte man im Prinzip alle mikroskopischen Prozesse in der Stoßfront berücksichtigen. Eine Untersuchung dieser Art ist aber außerhalb der Zielsetzungen dieser Arbeit. Hier wurde also nicht versucht, eine physikalisch begründete Annahme für die spektrale Verteilung der Emissivität zu machen; in weiteren Anwendungen der hier beschriebenen Methode werden wir aber eine bessere Behandlung dieses Punktes durchführen. In den praktischen Rechnungen wurde vorausgesetzt, daß die totale Strahlungsemission denselben spektralen Verlauf zeigt, wie die thermische Emission. Hier muß wieder betont werden, daß diese Annahme nur der Einfachheit halber gemacht worden ist. Ein weiterer Vorteil dieser Annahme ist, daß sie den direkten Vergleich mit Larsons Ergebnissen (1969b) erlaubt. Wir nehmen also an, daß die totale Strahlungsemission quasi-thermisch vor sich geht, d.h.

$$j_\lambda = k K_\lambda B_\lambda \tag{3.55}$$

k wird dabei durch die folgende Bedingung gegeben

$$\int_0^\infty j_\lambda \, d\lambda = j \tag{3.56}$$

Man hat

$$k = \frac{\frac{\kappa\sigma}{\pi} T^4 + \frac{\epsilon}{4\pi}}{\int_0^\infty \kappa_\lambda B_\lambda \, d\lambda} \tag{3.57}$$

die Ergiebigkeit ist also

$$S_\lambda(r) = \frac{\frac{\kappa\sigma}{\pi} T^4(r) + \frac{\epsilon(r)}{4\pi}}{\int_0^\infty \kappa_\lambda B_\lambda(r) d\lambda} B_\lambda(r) \tag{3.58}$$

Das Temperatur-Korrekturverfahren muß jetzt geeignet modifiziert werden, um die Energieproduktion zu berücksichtigen.

Die Bedingung des radiativen Gleichgewichts schreiben wir jetzt in der Form

$$\int_0^\infty \kappa_\lambda (S_\lambda - J_\lambda) \, d\lambda = \frac{\epsilon}{4\pi} \tag{3.59}$$

Diese letzte Gleichung wurde in folgender Weise hergeleitet: integrieren wir zunächst die Transportgleichung (3.1) über μ, bekommen wir

$$\frac{1}{r^2 \rho} \frac{d}{dr}(r^2 H_\lambda) = j_\lambda - \kappa_\lambda J_\lambda \tag{3.60}$$

Wir integrieren jetzt über λ , dann ergibt sich

$$\frac{1}{16\pi^2 r^2 \rho}\,\frac{dL_r}{dr} = \int_0^\infty \kappa_\lambda (S_\lambda - J_\lambda)\, d\lambda \tag{3.61}$$

Weiter benutzen wir die Tatsache, daß die Energie, die beim Radius r produziert wird, in Strahlung umgewandelt wird, d.h.

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\, \epsilon \tag{3.62}$$

(3.61) und (3.62) sind aber äquivalente Beziehungen. Wir bekommen also die Gleichung (3.59). Die Ergiebigkeit, die (3.59) erfüllt, sei durch

$$S_\lambda^* = k\, B_\lambda^* = k\left(B_\lambda + \frac{\partial B_\lambda}{\partial T}\,\Delta T\right) \tag{3.63}$$

gegeben. (3.59) kann dann so geschrieben werden

$$k\int_0^\infty \kappa_\lambda B_\lambda\, d\lambda + k\Delta T \int_0^\infty \kappa_\lambda \frac{\partial B_\lambda}{\partial T}\, d\lambda - \int_0^\infty \kappa_\lambda J_\lambda\, d\lambda = \frac{\epsilon}{4\pi} \tag{3.64}$$

Daraus bekommen wir die Temperaturkorrektur

$$\Delta T = \frac{\int_0^\infty \kappa_\lambda J_\lambda \, d\lambda - \frac{\kappa\sigma}{\pi} T^4}{\frac{\kappa\sigma}{\pi} T^4 + \frac{\epsilon}{4\pi} \int_0^\infty \kappa_\lambda B_\lambda \, d\lambda} \int_0^\infty \kappa_\lambda \frac{\partial B_\lambda}{\partial T} \, d\lambda \tag{3.65}$$

Die Ergiebigkeit (3.58) und die Temperaturkorrektur (3.65) sind die einzigen Veränderungen, die in dem mathematischen Verfahren von Abschnitt 3.4 auftauchen. Sie erlauben uns, die Strahlungsproduktion in der Stoßfront im Rahmen der sehr einfachen Annahme (3.55) zu behandeln.

Damit schließen wir die Beschreibung der in dieser Arbeit benutzten Lösungsverfahren des radiativen Transportproblems ab. Im nächsten Kapitel werden die Ergebnisse der Rechnungen für den 1 $M_\odot$ Protostern zusammengefaßt.

4. Ergebnisse und Diskussion

4.1. Voraussetzungen bei der Berechnung des emittierten Spektrums

Im vorhergehenden Kapitel haben wir eine Methode zur Lösung des nicht-grauen Strahlungstransportproblems in Protosternhüllen beschrieben. Diese Methode erweist sich als allgemeingültig: sie kann z.B. sowohl die Ergiebigkeit (3.8) als auch einen willkürlichen Opazitätsverlauf behandeln.

Für die Testrechnungen, die wir durchgeführt haben, sind dennoch folgende einfache Voraussetzungen gemacht worden, und zwar um Rechenzeit zu sparen:

i) Die Ergiebigkeit sei der Planckschen Funktion der lokalen Temperatur gleich.

ii) Der Opazitätsverlauf sei durch ein Potenzgesetz dargestellt.

iii) Die Strahlung in der Stoßfront habe einen thermischen Spektrum.

Die erste Voraussetzung ist wahrscheinlich nicht sehr realistisch für eine protostellare Wolke, denn sie hat unter anderem LTE zur Folge. Die Relevanz des LTE in Protosternhüllen kann mit Recht bezweifelt werden. Es muß aber hervorgehoben werden, daß praktische Rechnungen wie unsere bis jetzt nur im Rahmen des LTE möglich gewesen sind. Die Arbeit von Mihalas und Hummer (1974) gibt zwar eine verwendbare Basis für NLTE Rech-

nungen in sphärischen Atmosphären, verlangt aber noch zuviel Rechenzeit, um mit einem hydrodynamischen Programm gekoppelt werden zu können.

Die zweite in (i) enthaltene Annahme bedeutet die Vernachlässigung der Streuung, die durch die Staubteilchen bedingt wird. Diese Annahme ist eine gute Näherung im Infraroten, gilt aber nicht im Visuellen. Es sei aber hier betont, daß die Berücksichtigung der Streuung im Lösungsverfahren prinzipiell möglich ist. Rechnungen dieser Art sind geplant.

In (i) wird noch vorausgesetzt, daß Staub und Gas dieselbe Temperatur haben. Das ist keine sehr gute Näherung für die äußeren Schichten, hat aber den Vorteil, einfach zu sein.

Die Voraussetzung (ii) wird durch die unvollständige Kenntnis des detaillierten Verlaufs der Staubopazität bedingt. In (4.1) wurde $p = 3/2$ gesetzt, um unsere Ergebnisse mit denen von Larson (1969b) vergleichen zu können. Dieser Wert für p stützt sich auf Beobachtungsdaten von Johnson und Borgmann (1963) und Johnson (1965) über die Wellenlängenabhängigkeit der interstellaren Extinktion im nahen infraroten Bereich. Von Gaustad wurde gezeigt, daß, solange Staub vorhanden ist, die Gasopazitäten vernachlässigbar sind(Gaustad,1965).

Der Proportionalitätsfaktor in (4.1) wurde so gewählt, daß das mittlere $\overline{\kappa_\lambda}$ über den ganzen Wellenlängenbereich dem Rosselandschen Mittelwert gleich ist, der im hydrodynamischen Programm benutzt wurde. So wurde verfahren, um die Anpassung der beiden Programme zu erleichtern. Die mittlere Rosselandsche Opazität wurde,

wie folgt, berechnet: über $T = 5000$ K ist K_r durch Interpolation zwischen den Werten von Cox und Stewart (1969) gegeben. Für $1300\ K \lesssim T \lesssim 5000$ K wurden die Krügelschen (1971) Opazitäten verwendet. Unter $T = 1300$ K haben wir die Absorptionskoeffizienten von Gaustad (1963) benutzt. Die Voraussetzung (iii) ist bereits im dritten Kapitel ausführlich diskutiert worden.

Das Strahlungstransportprogramm wurde verwendet, um die Temperaturverteilung und das emittierte Spektrum zu verschiedenen Zeitpunkten der Entwicklung des Protosterns zu berechnen. Da die verbesserte Temperaturverteilung auf die Dynamik des Kollapses keinen merklichen Einfluß ausübt, erwies es sich nicht als nötig, die ganze Entwicklung des 1 $M_\odot$ Protosterns noch einmal zu berechnen. Daß die verbesserte Temperatur der äußeren Schichten die Dynamik selbst nicht beeinflußt, läßt sich dadurch erklären, daß sich die Materie dieser Schichten während des größten Teils der Entwicklung praktisch im freien Fall befindet. Selbst für die korrigierte höhere Temperatur in den äußeren Schichten ist der Strahlungsdruck bei einem Protostern dieser Masse immer noch vernachlässigbar.

Am Beginn jedes berechneten Entwicklungsabschnittes wurde als Anfangsmodell ein Modell benutzt, bei dem der Strahlungstransport in der ganzen Wolke durch die Diffusionsgleichung approximiert wurde. Daher wurde es notwendig, die äußere Randbedingung $T(r = R) = 10$ K im hydrodynamischen Programm zu ändern. Um eine leichte Anpassung der beiden Programme zu gewährleisten, wurde

die Temperatur am äußeren Rand dazu gezwungen, sich auf den vom Strahlungstransportprogramm berechneten Wert einzustellen. Dieses Verfahren erlaubt aber nicht, die so berechnete Temperaturverteilung sinnvoll mit der zu vergleichen, die man aus der Diffusionsgleichung und einer konstanten Randtemperatur in den Rechnungen von Appenzeller und Tscharnuter (1975) bekommt.

4.2 Optisch dicke Kollapsphase

Das spektrale Aussehen des Protosterns in dieser Phase werden wir hier anhand zweier Spektren diskutieren. Das erste Spektrum wurde berechnet, als der Kern 3% der Gesamtmasse umfaßte, das zweite, als 50% der Masse im Kern enthalten war. In dieser Phase ist die Stoßfront nicht sichtbar, die Strahlungsemission der Wolke findet nur im Infraroten statt.

Das erste Spektrum ist in der Abbildung 4.1 dargestellt (durchgezogene Linie), und wird mit einem schwarzen Körper desselben Emissionsmaximums verglichen (gestrichelte Linie). Die Temperatur T_B, die in der Abbildung angegeben ist, ist die Temperatur dieses schwarzen Körpers. T_B wird durch folgende Formel berechnet:

$$\lambda_{max}\, T_B = 0.29 \quad \text{cm K} \tag{4.2}$$

wobei λ_{max} die Wellenlänge des Emissionsmaximums des berechneten Spektrums ist. Beide Kurven sind normiert, wenn über den gesamten Wellenlängenbereich integriert wird. Bei kurzen Wellenlängen ist die Steigung des be-

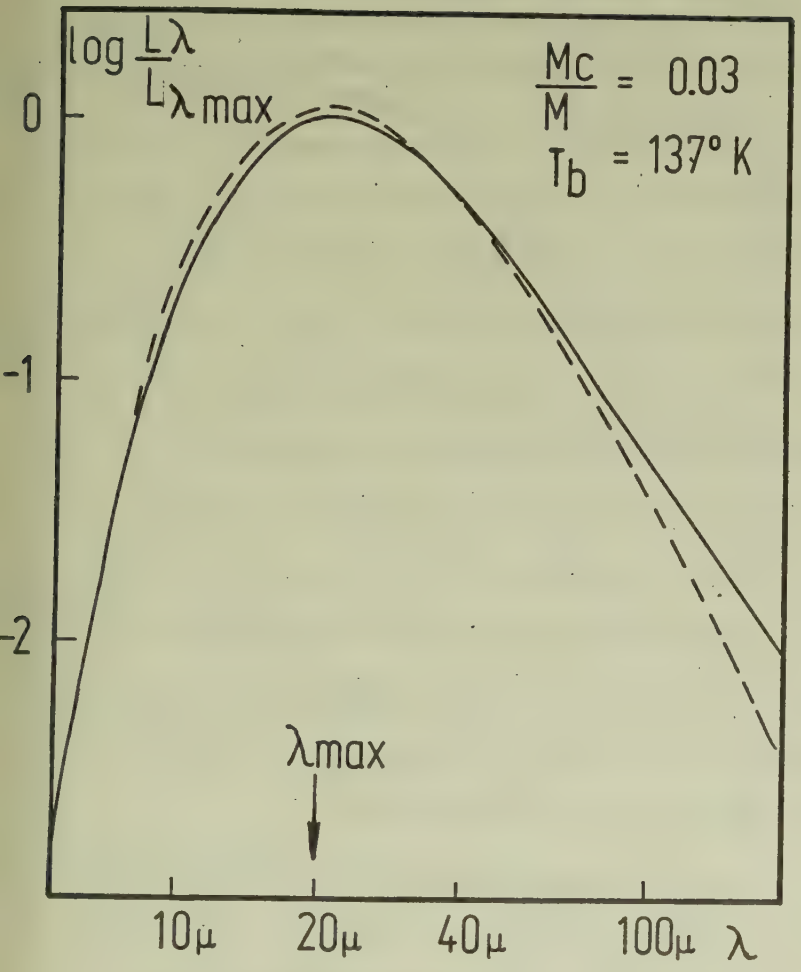


Abbildung 4.1 Spektrum eines 1 $M_\odot$ Protosterns wenn der Kern 3% der Gesamtmasse umfaßt. (s. Erklärungen im Text, S. 64)

rechneten Spektrums ungefähr gleich der des schwarzen Körpers, ist aber nicht ganz so steil wie das von Larson (1969b). Die approximative Temperaturverteilung und die Grundannahmen, die von Larson benutzt worden sind, sind S. 21-23 dieser Arbeit diskutiert. Der Grund für den oben erwähnten Unterschied liegt hauptsächlich in den verschiedenen Opazitäten. Larson verwendet eine nur von λ abhängige Staubopazität, während in unseren Rechnungen K_λ so normiert ist, daß die mittlere Opazität über den ganzen Wellenlängenbereich gleich dem Rosselandschen Mittelwert des hydrodynamischen Programms ist. Bei T= 200 K ist im Rosselandschen Mittelwert die Verdampfung des Eismantels der Metalloxydpartikeln berücksichtigt (Gaustad 1963). Dieser Prozess verursacht eine Abnahme der Opazität von 2.4 $cm^2 g^{-1}$ bis 0.12 $cm^2 g^{-1}$, so daß die von uns in diesem Bereich verwendeten Opazitäten viel kleiner sind als die von Larson. Daher ist die Absorption im Bereich der kurzen Wellenlängen kleiner als bei Larson.

Das Larsonsche Lösungsverfahren des Strahlungstransports benötigt ein Potenzgesetz für die Abhängigkeit des Volumen-Absorptionskoeffizienten vom Radius, d.h.

$$k_\lambda(r) \equiv K_\lambda \rho(r) \propto r^{-n} \qquad (4.3)$$

Mit dieser Annahme findet Larson, daß sich der Verlauf des emittierten Spektrums während der optisch dicken Phase des Kollapses nicht ändert. Dieses Ergebnis ist offensichtlich durch die Tatsache bedingt, daß die Berechnung des Spektrums und die dynamische Entwicklung des Protosterns nicht gekoppelt sind (als Konsequenz von (4.3)). Die Abbildung 4.2 zeigt ein anderes Spektrum der optisch dicken Phase (50% der Gesamtmasse im Kern). Vergleicht man die Abb.4.1 und 4.2, so sieht man daß sich der spektrale Verlauf in

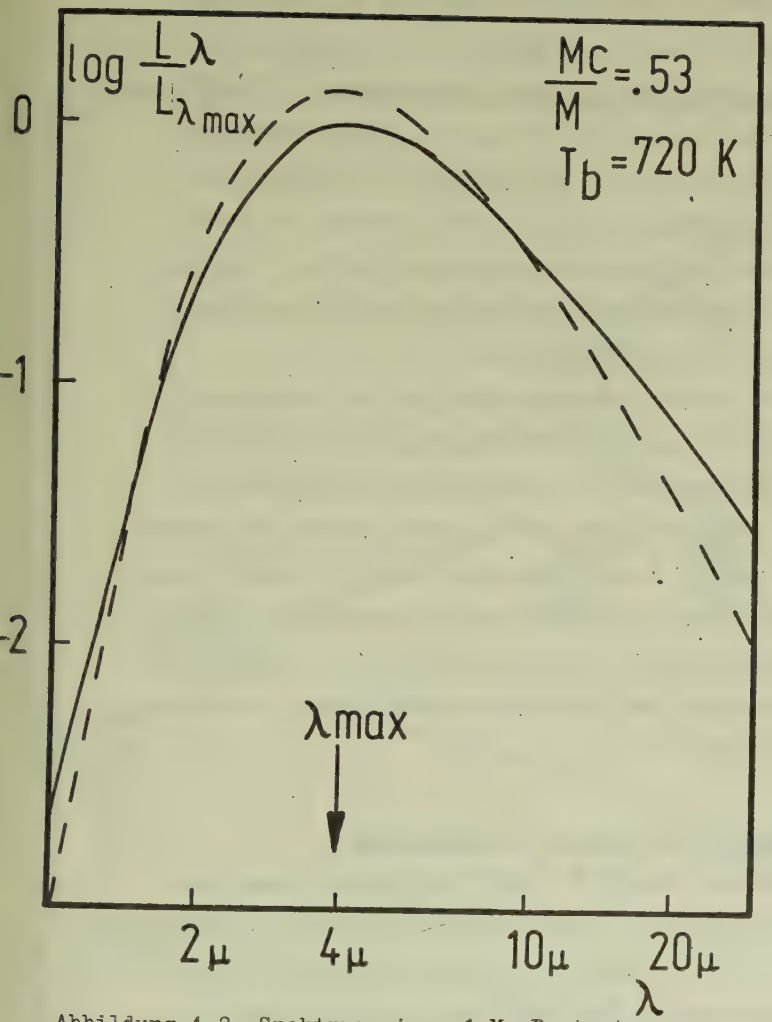


Abbildung 4.2 Spektrum eines 1 $M_\odot$ Protosterns wenn der Kern 53% der Masse umfaßt. (s. Erklärungen im Text, S. 64)

Wirklichkeit langsam ändert, und zwar wird das Spektrum flacher. Der Grund dafür ist der folgende: im Laufe der Entwicklung bewegt sich die Stelle $\tau = 2/3$ (dieser Wert sei nur als Beispiel gegeben) in Richtung auf den Kern. Die Ausdehnung der Atmosphäre und der Temperaturbereich, der für die Bildung des Spektrums verantwortlich ist, werden also größer. Das hat zur Folge, daß das Spektrum breiter wird, besonders im Bereich der kurzen Wellenlängen.

Neben dieser langsamen Änderung des spektralen Verlaufes ist auch eine Verschiebung der Wellenlänge des Emissionsmaximums zu bemerken. Das Maximum liegt bei 20μ, wenn der Kern 3% der Masse umfaßt und wandert dann bis zu $\lambda = 2.5\mu$ am Ende der optisch-dichten Phase. Da die Veränderung des spektralen Verlaufes nur gering ist, kann man als erste Näherung für die optisch dicke Phase annehmen, daß sich nur die Wellenlänge des Emissonsmaximums verschiebt.

4.3 Endphase der Protosternentwicklung

Wenn die Stelle $\tau = 2/3$ die untere Grenze der Stoßfront erreicht, beginnt der Kern sichtbar zu werden. Die Dichte der Materie in der Hülle nimmt mit der Zeit ab, so daß die vom Kern emittierte Strahlung mit der Zeit immer besser durchdringt.

Entwicklungsabschnitte für verschiedene Werte der Kernmasse, nämlich für 0.64, 0.80, 0.87 und 0.95 $M_\odot$ wurden berechnet. Die entsprechenden Spektren sind in der Abbildung 4.3 aufgetragen. Sie zeigen das Sichtbarwerden des Kerns und das gleichzeitige Verschwinden der

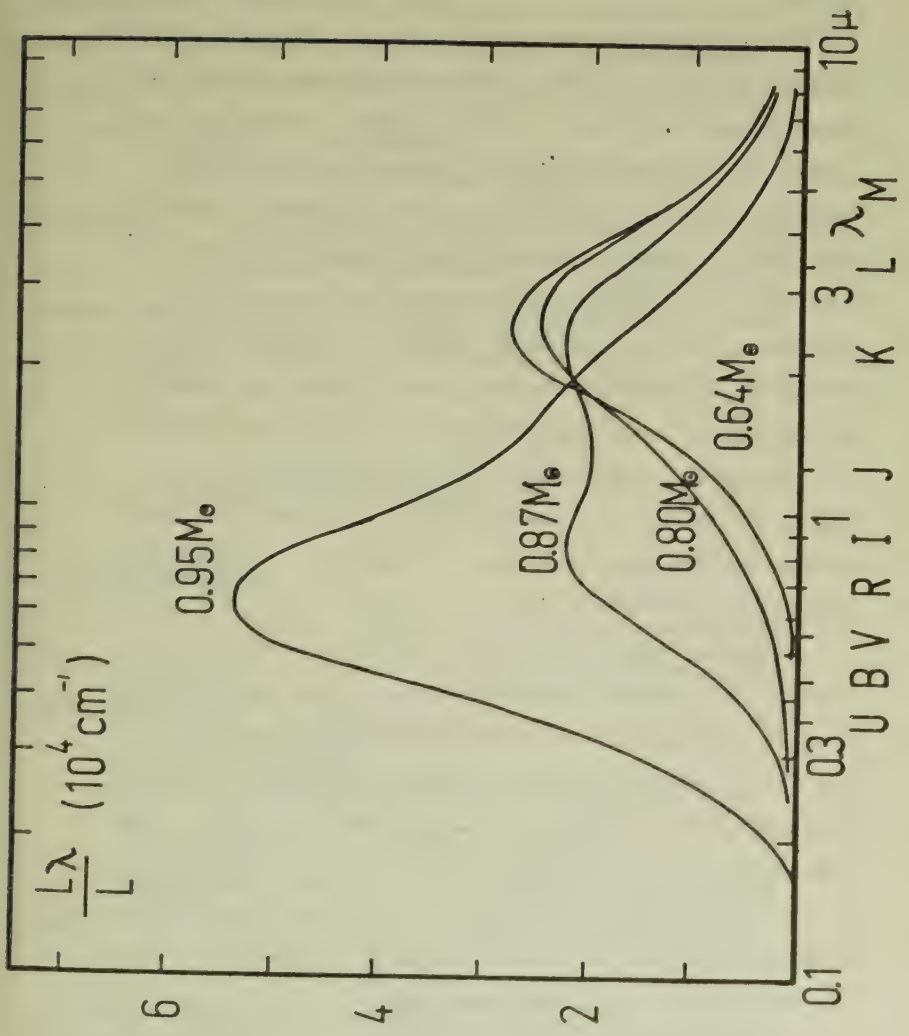


Abbildung 4.3 Entwicklung des Spektrums eines 1 $M_\odot$ Protosterns wenn die Hülle optisch dünn wird. Die Spektren sind normiert und mit der Masse des Kerns gekennzeichnet.

infraroten Spitze, was dem Verschwinden des Staubes entspricht.

Für die Rechnungen wurde in dieser Phase die weitere Annahme gemacht, daß die Verdampfungstemperatur der Staubkörner etwa 1000 K war. Diese Annahme erlaubt den Vergleich unserer Ergebnisse mit Larsons approximierten Spektren. Für größere Temperaturen als 1000 K wurde die Opazität als grau angenommen (der Rosselandsche Mittelwert des hydrodynamischen Programms wurde benutzt).
In dieser Entwicklungsphase beginnt die Integration der Transportgleichung am Rand des Kern, unter der Stoßfront, so daß die mathematische Formulierung, die im Abschnitt 3.4 beschrieben worden ist, benutzt werden muß. Wenn der Kern 95% der Gesamtmasse umfaßt, ist die infrarote Komponente des Spektrums fast verschwunden und wir haben jetzt $T_B \simeq 4400$ K .

Wenn wir unsere Ergebnisse mit denen von Larson (1969b) vergleichen, bemerken wir, daß der Wellenlängenbereich der Emission in unseren Rechnungen breiter ist. Das ist offensichtlich eine Konsequenz unserer besseren Behandlung des Strahlungstransportproblems. Larson berechnet das emittierte Spektrum in dieser Phase, indem er in heuristischer Weise das Spektrum eines schwarzen Körpers mit einer Lösung des radiativen Transports in der Hülle übereinanderlegt. In der vorliegenden Arbeit stellen die beiden Komponenten des Spektrums eine mathematische Lösung der Transportgleichung mit den oben diskutierten Annahmen dar.

Es besteht also keine Notwendigkeit, komplizierte Prozesse wie Abweichung von der sphärischen Symmetrie,

[illegible] und verschiedene Verdampfungstemperaturen annehmen, um Teilchengrößenverteilungen der Emission zu bekommen, die hinter an denen der T-Tauri Beobachtungen liegen, womit diese Prozesse wahrscheinlich eine Rolle in der Planetenbildung spielen.

Im folgenden Kapitel vergleichen wir unsere Ergebnisse mit Beobachtungen von Infrarotquellen, die vermutlich protoplanetare Objekte sind. Wir werden sehen, daß die Ergebnisse in befriedigender qualitativer Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten stehen.

4.4 Vergleich mit Beobachtungen

4.4.1 Einleitung

Im Rahmen unserer begrenzten Kenntnis der Planetenentstehung, sind in diesem Zusammenhang hinsichtlich drei Objektklassen zu beachten:

- dunkle Globulen
- Infrarote Objekte (z.B. das BN Objekt, β-Lyr)
- T-Tauri Sterne und verwandte Objekte.

Die dunklen Globulen sind vermutlich protoplanetare Nebel, die an Anfang ihres Kollapses stehen; die IR-Objekte sind wahrscheinlich protoplanetare Nebel mit weiterentwickelten Massen, und die T-Tauri Sterne kann man als Sterne mit Resten von Planetennebeln betrachten. Im folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Gebilde diskutiert.

Die meisten beobachteten Objekte dieser Art sind Objekte vom Massenbereich (offenen) Sternhaufen, weil die massen-

reichsten Objekte auch die heißesten sind), so daß nur Vergleich mit einem $1\ M_\odot$ Protostern nur qualitativ geschehen kann.

4.4.2 Dunkle Globulen

Die Eigenschaften einiger dunkler Globulen sind von Bok, Cordwell und Cromwell (1973) diskutiert worden. Bedeutend ist, daß die Globulen oft in isolierten aktiver Sternentstehung oder in hoher molekularer Dichte zu finden sind. Ferner zeigen sie oft zentrale Kondensationen. Larson (1973a) weist darauf hin, daß Anfangswerte für protostellare Wolken in Kollapsrechnungen den Parametern der Globulen ähneln (z.B. besitzt eine Globule in BIC 2244 eine Masse von $0.5\ M_\odot$ bei einem Radius von 0.36 pc. Dieser Wert läßt sich gut mit dem in den $1\ M_\odot$ -Rechnungen angenommenen Anfangsradius von 0.5 pc vergleichen).

4.4.3 Infrarote Objekte

Solange die Staubhülle optisch dicht ist, ist den Protostern nur im Infraroten zu beobachten. Die Dauer dieser Entwicklungsphase beträgt nur die Freifall-Zeitskala der Anfangswolke, so daß nur einige Dutzend dieser Objekte beobachtbar sein sollten. Bis jetzt sind nur sehr helle Objekte dieser Klasse gefunden worden. In folgendem diskutieren wir die Eigenschaften zweier Infrarot-Gebilde, die wahrscheinlich massereiche Protosterne sind: W3-IRS5 und das Becklin-Neugebauer-Objekt in Orion.

Die S-II Region W3 liegt im Perseus Arm in einer Entfernung von ~ 3 kpc. Infrarote Beobachtungen sind

von Wynn-Williams et al. (1972) durchgeführt worden. Radio-Beobachtungen hat Wynn-Williams (1971) gemacht. Dabei wurden neun einzelne Objekte in W3 wahrgenommen. Unter diesen ist IRS5 eine infrarote Quelle, die nicht mit einer H II-Kondensation verbunden ist. Ferner entspricht sie weder einer optischen Quelle noch einer Radioquelle. IRS5 ist unaufgelöst, ihr Durchmesser ist kleiner als 2" (0.05 pc), und ihre Lage stimmt mit der eines H_2O-Masers überein. Das Spektrum von IRS5 ist in Abbildung (4.4) gezeigt. Dort wird es mit einem berechneten Spektrum des 1 $M_\odot$ Protosterns in der optisch dichten Phase verglichen. Die Übereistimmung ist nicht viel besser als wenn man die gemessenen Punkte mit dem Spektrum eines schwarzen Körpers von 350 K vergleicht. Appenzeller und Tscharnuter (1975) weisen darauf hin, daß die Leuchtkraft (3.10^4 $L_\odot$) und effektive Temperatur (T_{eff} = 350 K) von IRS5 den berechneten Parametern eines massereichen Protosterns entsprechen, der sich in der Phase des nuklearen Brennens befindet, der aber noch nicht seine Hülle abgeblasen hat. Da ein massereiches Objekt dieses Typs wahrscheinlich eine ganz andere Struktur als ein 1 $M_\odot$ Protostern hat, ist eine genaue Übereinstimmung des berechneten Spektrums und der Beobachtungen nicht zu erwarten.

Das Becklin-Neugebauer Objekt in Orion ist intensiv beobachtet worden. Die neuesten Daten wurden von Becklin et al. (1973) angegeben. Diese infrarote Quelle entspricht keiner optischen Quelle und keiner Radioquelle, ihre Energiekurve ähnelt der eines schwarzen Körpers mit T = 530 K. Bei 3.1μ und 10μ sind starke Absorptionen

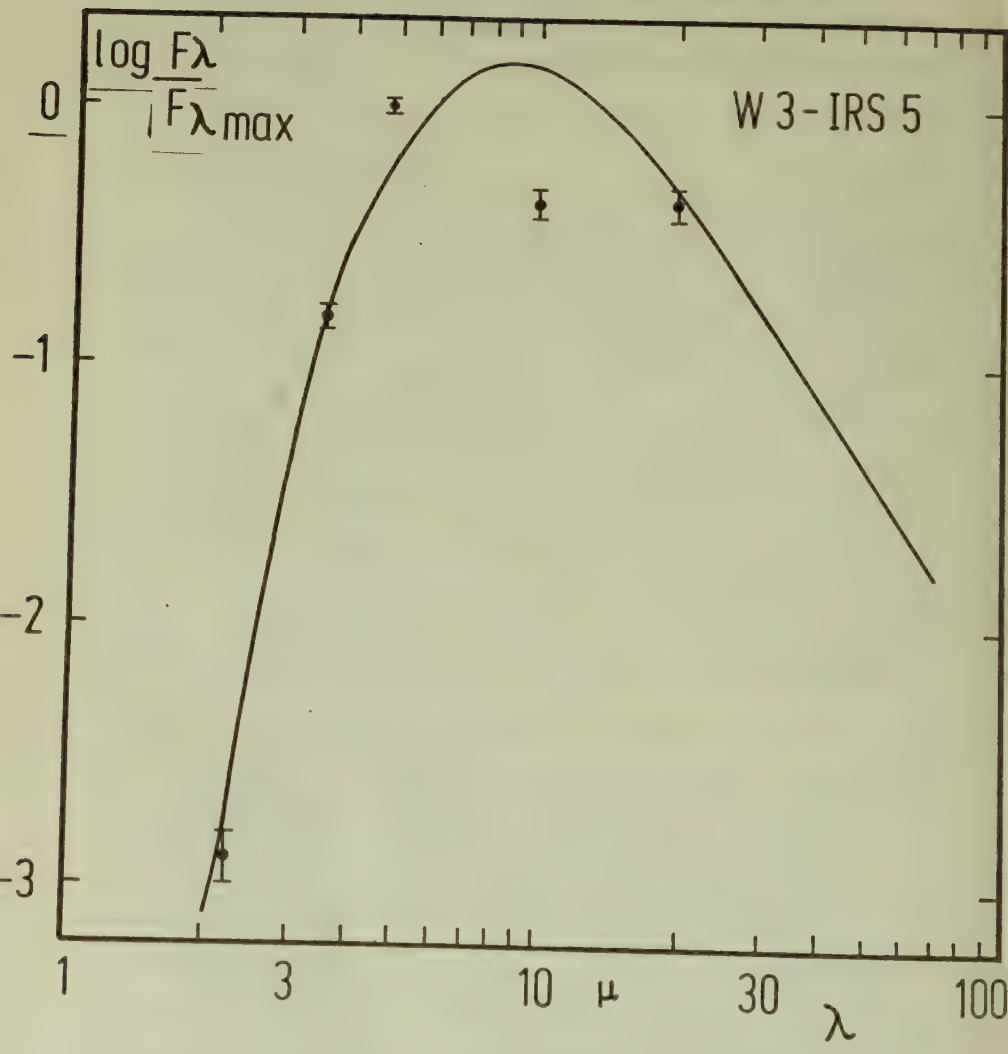


Abbildung 4.4 Das Spektrum von W3-IRS5 (Meßpunkte von Wynn-Williams et al. 1972). Die durchgezogene Linie ist ein Spektrum des 1 $M_\odot$ Protosterns in der optisch dicken Phase.

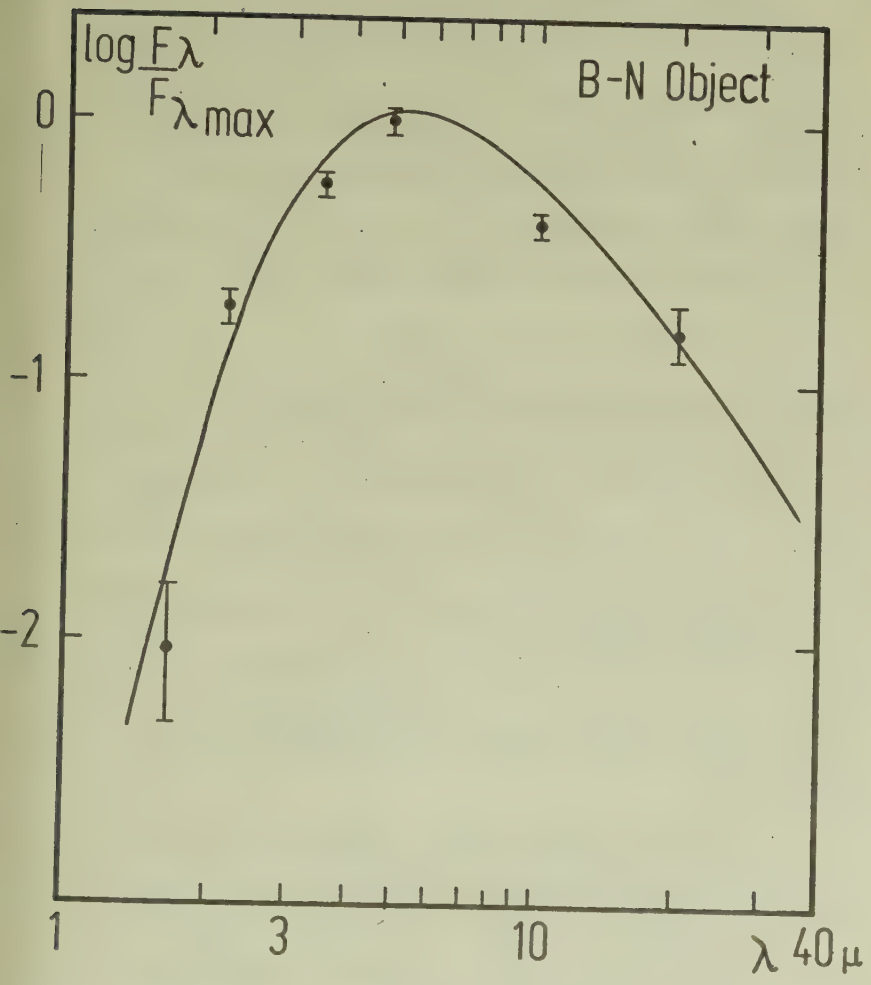


Abbildung 4.5 Das Spektrum des Becklin-Neugebauer Objektes. (Meßpunkte von Becklin et al. 1973) Die durchgezogene Linie ist ein Spektrum des 1 $M_\odot$ Protosterns in der optisch dicken Phase.

nachgewiesen worden.

Das B-N Objekt hat eine Leuchtkraft von 1.5 10^3 $L_\odot$, sein Durchmesser ist $< 2"$. Aus den Rechnungen von Larson (1972a) kann man für das B-N Objekt eine Masse von ~ 5 $M_\odot$ abschätzen. In Abbildung 4.6 wird das Spektrum des B-N Objektes mit einem berechneten Spektrum der optisch dichten Phase verglichen. Die qualitative Übereinstimmung ist trotz der großen Masseunterschied als gut zu bezeichnen.

4.4.4 T-Tauri Sterne und verwandte Objekte

Die Eigenschaften der T-Tauri Sterne sind von Herbig (1962) ausführlich diskutiert worden. Diese Sterne liegen vor allem in Gebieten galaktischer Wolken, und zwar nur in dunklen Wolken. Ferner befinden sie sich im Hertzsprung-Russell-Diagramm oberhalb der Hauptreihe, (s. z.B. Mendoza 1970). Es ist also zu vermuten, daß T-Tauri Sterne sehr junge Sterne sind, und daß Staub eine wichtige Rolle bei ihren physikalischen Eigenschaften spielt.

Herbig (1962) findet, daß die effektiven Temperaturen der T-Tauri Sterne in einem begrenzten Bereich $3.50 \lesssim \log T_{eff} \lesssim 3.75$ liegen. Ferner liegen ihre Radien im Bereich von 1 bis 3 $R_\odot$. Diese Werte lassen sich mit berechneten Protosternmodellen bis 1.5 $M_\odot$ vergleichen. Die Streuung der T-Tauri Sterne im Hertzsprung-Russell-Diagramm kann wahrscheinlich durch verschiedene Anfangsbedingungen beim Kollaps, sowie verschiedene Absorptionseigenschaften der zirkumstellaren Staubhüllen erklärt werden (Larson 1972a). Meistens

zeigen T-Tauri Sterne eine infrarote Emission, die auf Staubhüllen hinweist, in den meisten Fällen ist diese IR Emission aber nicht dominierend.

Extreme T-Tauri Sterne sind T-Tauri Sterne für deren Eigenschaften die Staubhüllen eine besonders wichtige Rolle spielen. Beispiele für diese Gruppe sind R Monocerotis und R Coronae Australis. Die Spektren dieser beiden Objekte sind von Mendoza (1970) gemessen worden. In Abbildung 4.6 wird das gemessene Spektrum von R Mon.(durchgezogene Linie) mit dem Spektrum des 1 $M_\odot$ Protosterns, wenn der Kern 80% der Gesamtmasse umfaßt, verglichen (gestrichelte Linie). Ferner zeigt Abbildung 4.7 den Vergleich des Spektrums von R Cr A mit dem Protostern, wenn die Masse des Kerns 0.64 $M_\odot$ beträgt. Da R Cr A mit $M \simeq 2.5\ M_\odot$ das massenärmste der hier diskutierten Objekte ist, ist die gute Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Spektren besonders bemerkenswert.

Zum Schluß seien noch die interessanten Eigenschaften einer Unterklasse der T-Tauri Sterne, nämlich die YY Orionis Sterne, erwähnt. Walker (1972) wies darauf hin, daß in diesen Sternen rotverschobene Absorptionslinien zu sehen sind, die auf einfallende Materie mit Geschwindigkeiten von 150 bis 400 km/sec. schließen lassen. Diese Werte stehen in guter Übereinstimmung mit den berechneten Geschwindigkeiten für den 1 $M_\odot$ Protostern (Appenzeller und Tscharnuter 1975). Die starken UV Exzesse, die in YY Ori Sternen auftreten, kann man aber nicht erklären, wenn man annimmt, daß Strahlungsemission nur thermisch vor sich geht.

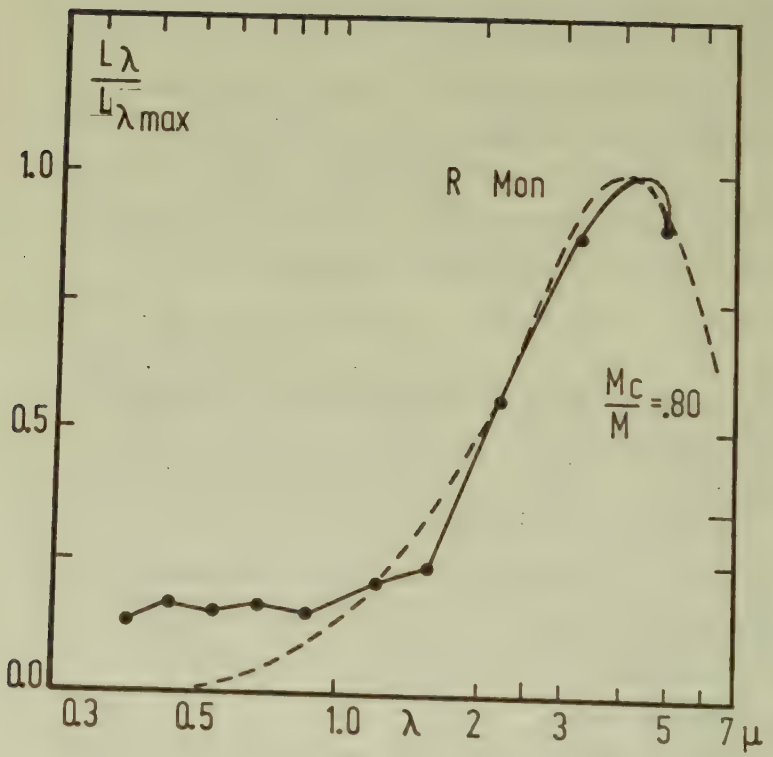


Abbildung 4.6 Das Spektrum von R Mon (nach Mendoza 1970). Die gestrichelte Linie ist das Spektrum des 1 $M_\odot$ Protosterns wenn der Kern 80% der Gesamtmasse umfaßt.

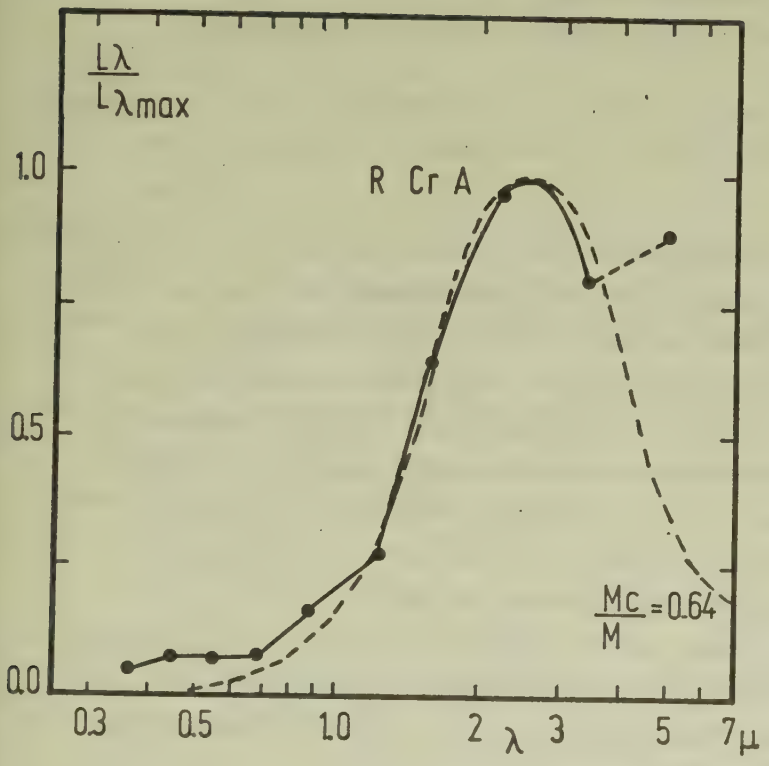


Abbildung 4.7 Das Spektrum von R CrA (nach Mendoza 1970). Die gestrichelte Linie ist das Spektrum des 1 $M_\odot$ Protosterns wenn der Kern 64% der Gesamtmasse umfaßt.

Möglicherweise könnte man diese Spektren reproduzieren, indem man nicht-thermische Energiequellen in der Stoßfront berücksichtige. Es ist beabsichtigt, Rechnungen dieser Art in der nächsten Zukunft durchzuführen.

Die oben diskutierten Ergebnisse müssen noch um die Berechnung einiger Entwicklungsabschnitte erweitert werden, bevor man einen Entwicklungsweg im Hertzsprung-Russell-Diagramm für den 1 $M_\odot$ Protostern angeben kann.

Wie oben erwähnt, sind auch Entwicklungsrechnungen von Protosternen unter Berücksichtigung von nicht-thermischen Quellen innerhalb der Stoßfront beabsichtigt. Weiter soll auch die Streuung durch Staubteilchen im Lösungsverfahren eingebaut werden.

Ferner ist es von großem Interesse, die Entwicklung von massereichen Protosternen zu berechnen; die dynamischen Effekte der verbesserten Temperatur sollten sich dann bemerkbar machen.

Das in dieser Arbeit beschriebene Lösungsverfahren des Strahlungstransports kann selbstverständlich auch unabhängig vom hydrodynamischen Programm benutzt werden.

Literaturverzeichnis

Ahlberg, J.H., Nilson, E.H., Walsh, J.L. 1967, The Theory of Splines and their Applications, Academic Press, New York.

Appenzeller, I. 1970, Astron. & Astrophys. 5, 355

Appenzeller, I. 1972, Mitt. Astron. Ges. 31, 39

Appenzeller,I., Tscharnuter, W. 1974, Astron. & Astrophys. 30, 423

Appenzeller, I., Tscharnuter, W. 1975, Astron. & Astrophys. 40, 397

Apruzese, J.P. 1974, Ap. J. 188, 539

" " 1975a, Ap. J. 196, 753

" " 1975b, Ap. J. 196, 761

" " 1975c, Ap. J. 196, 769

Becklin, E.E., Neugebauer, G., Wynn-Williams, C.G. 1973, Ap. J. 182, L7

Bok, B.J., Cordwell, C.S., Cromwell, R.H. 1971, Dark Nebulae, Globules, and Protostars, Ed. B.T. Lynds, S.33, University of Arizona Press, Tucson.

Bodenheimer, P. 1968,Ap. J. 153, 483

Bodenheimer, P. 1972, Rep. Prog. Phys. 35, 1

Buerger, P.B., Collins, G.W., II, 1973, Bull. A.A.S. 5, 348

Carlson, B.G., Lathrop, K.D. 1968, in "Computing methods in Reactor Physics", Eds. H. Greenspan, C.N. Kelber, and D. Okrent, Gordon and Breach, New York.

Cassinelli, J.P. 1971,Ap.J. 165, 265

Chapman, R.D. 1966, Ap.J. 143, 61

Chandrasekhar, S. 1934, M.N.R.A.S. 94. 444

Cohen, M., Woolf, N.J. 1971, Ap.J. 169, 543

Cox, A.N., Stewart, J.N. 1969 Academia Nauk, Scientific Information 15, 1

Feautrier, P. 1964, C.R. hebd. Se. Ac. Sc. Paris 258, 3189

Field, G.B. 1970, Interstellar Gas Dynamics, I.A.U. Symposium No. 39

Gaustad, J.E. 1963, Ap.J. 138, 1050

Gilman, R.C. 1974, Ap.J. 188, 87

Hayashi, C. 1966, Ann. Rew. Astron. & Astrophys. 4, 171

Hayashi, C. 1970, in Evolution Stellaire avant la Séquence Principale (16. Symposium in Liège), Université de Liège, S. 127.

Heiles, C. 1971, Ann. Rew. Astron. & Astrophys. 9, 293

Herbig, G.H. 1962, Adv. Astron. Astrophys. 1, 47

Huang, S.S. 1969a, Ap.J. 157, 835

" " 1969b, Ap.J. 157, 843

Hummer, D.G., Kunasz, C.V., Kunasz, P.B. 1973, Comp. Phys. Comm. 6, 38

Hummer, D.G., Rybicki, G.B. 1971, M.N.R.A.S. 152, 1

**Hundt et al. s. unten

Johnson, H.L. 1965, Ap.J. 141, 923

Johnson, H.L., Borgmann, J. 1963, Bull. Astr. Inst. Netherl. 17, 115

Kippenhahn, R. Tscharnuter,W. 1975, preprint

Kippenhahn, R., Weigert, A., Hofmeister, E. 1967, in Methods in Computational Physics 7, 129, Academic Press, New York.

Kosirev, N.A. 1934, M.N.R.A.S. 94, 430

Krügel, E. 1971, Diplomarbeit, Göttingen

Kunasz, P.B., Hummer, D.G. 1974a, M.N.R.A.S. 166, 19

Kunasz, P.B., Hummer, D.G. 1974b, M.N.R.A.S. 166, 57

Larson, R.B. 1969a, M.N.R.A.S. 145, 271

" " 1969b, M.N.R.A.S. 145, 297

" " 1972a, M.N.R.A.S. 157, 121

" " 1972b, M.N.R.A.S. 156,437

" " 1973a, Ann. Rev. Astron. & Astrophys. 11, 219

" " 1973b, Fund. Cos. Phys.

Larson, R.B., Starrfield, S. 1971, Astron. & Astrophys. 13, 190

Mendoza, E.E. 1970, in Evolution Stellaire avant la Séquence Principale (16. Symposium in Liège). Université de Liège, S. 319.

Mihalas, D. 1970 Stellar Atmospheres, W.H. Freeman & Co., San Franscisco.

Mihalas, D., Hummer, D.G. 1974, Ap.J. Supp. 28, 343

Narita, S., Nakano, T., Hayashi, C. 1970, Prog. Theor. Phys. Japan 43, 942

Parker, E.N. 1966, Ap.J. 145, 811

Peraiah, A., Grant, I.P. 1973, J. Inst. Math. Appl. 12, 75

Roberts, W.W. 1969, Ap.J. 158, 123

Schmidt-Burgk, J. 1975, Astron. & Astrophys. 40, 249

Schmidt-Burgk, J., Scholz, M. 1975, Astron. & Astrophys. 41, 41

Schwarzschild, M. 1958, in Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, S. 37-42.

Shu, F.H., Milime, V, Gebel, W., Yuan, C., Goldsmith, D.W., Roberts, W.S. 1972 Ap.J. 173, 557

Sieber, D. 1974, Dissertation, Bonn.

Swings, J.P., Allen, D.A. 1971, Ap.J.Letters 167, 247

Walker, M.F. 1972, Ap.J. 175, 89

Westbrook, C.K., Tarter, C.B. 1975, Ap.J. 200, 48

Wynn-Williams, C.G. 1971, M.N.R.A.S. 151, 397

Wynn-Williams, C.G., Becklin, E.E., Neugebauer, G. 1972
M.N.R.A.S. 160, 1

** Hundt, E., Kodaira, K., Schmidt-Burgk, J., Scholz, M.
1975, Astron. & Astrophys. 41, 37

Lebenslauf

Am 17. Januar 1946 wurde ich in Nesle, Frankreich geboren.

Im Oktober 1951 wurde ich eingeschult und von 1956 an besuchte ich das humanistische Gymnasium (Lycée d'Etat) in Amiens. Dort legte ich im Juni 1964 das "Baccalauréat" ab.

Im Oktober 1964 begann ich mit dem Physik-Studium an der Universität zu Lille, wo ich im Oktober 1969 die "Maîtrise ès Sciences" erhielt.

Im Oktober desselben Jahres bekam ich ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienst und studierte in Göttingen. Dort fertigte ich unter Anleitung von Prof. Dr. R. Kippenhahn an der Universitäts-Sternwarte meine Diplomarbeit an. Das Diplom in Physik wurde mir am 22. Juni 1971 verliehen.

Vom Oktober 1971 an war ich als Teaching Assistant an der Montana State University in Bozeman (USA) tätig, wo ich im August 1973 den Grad, "Master of Science" erhielt.

Seit Oktober 1973 fertige ich an der Universitäts-Sternwarte in Göttingen unter Anleitung von Prof. Dr. I. Appenzeller meine Dissertation an.